

**Untersuchungen über
Zeitbereichsverfahren zur digitalen
Simulation von linearen
zeitinvarianten Systemen**

vorgelegt von

Hans-Peter Renn

Erlangen, 1976

1976 № 431

Untersuchungen über
Zeitbereichsverfahren zur digitalen
Simulation von linearen
zeitinvarianten Systemen

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Untersuchungen über Zeitbereichsverfahren zur digitalen Simulation von linearen zeitinvarianten Systemen

Dem Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen - Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur



vorgelegt von

Hans-Peter Renn

Erlangen, 1976



Als Dissertation genehmigt vom
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen - Nürnberg

Tag der Einreichung: 13. August 1976
Tag der Promotion : 9. November 1976

Dekan: Prof.Dr.rer.nat. H.J. Schneider
Berichterstatter: Prof.Dr.-Ing. H.W. Schüssler
Prof.Dr.rer.nat. B. Dejon

Herrn Professor Dr.-Ing. H.W. Schüssler danke ich für die interessante Aufgabenstellung, seine zahlreichen Anregungen und Hinweise, für seine stete Gesprächsbereitschaft und nicht zuletzt für seine Hilfen bei der Niederschrift der Arbeit.

Ferner gebührt mein Dank Herrn Professor Dr. rer.nat. B. Dejon für sein Interesse an der Abhandlung.

Weiter bin ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu Dank verpflichtet, deren Unterstützung die Untersuchungen erst ermöglichte.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einführung	1
2. Simulationsverfahren, die von der Übertragungsfunktion ausgehen	4
2.1 Zusammenstellung bereits bekannter und getesteter Verfahren	6
2.1.1 Z-Transformation (impulsinvariante Transformation)	6
2.1.2 Matched-Z-Transformation	7
2.1.3 Bilineare Transformation	8
2.1.4 Das Verfahren nach Boxer und Thaler	9
2.1.5 Transformation nach Pottle	10
2.1.6 Transformation nach Gorille	11
2.2 Das Verfahren nach Othmer	13
2.2.1 Transformation des Nenners der Übertragungsfunktion	14
2.2.2 Bestimmung der Zählerpolynomkoeffizienten	14
2.2.2.1 Beziehungen bei linearer Interpolation der Eingangssignalwerte	16
2.2.2.2 Beziehungen bei treppenförmiger Approximation der Eingangsfunktion	24
2.2.2.3 Berechnung der Zählerkoeffizienten aus Abtastwerten der Ausgangsfunktion	26
2.2.2.4 Beziehungen bei Berechnung aus Sprung- oder Rechteckantwort des kontinuierlichen Systems	29
2.2.3 Test des Othmer-Verfahrens	32
2.2.3.1 Testfunktion, Vergleichsmodell, Fehlerkriterium und Beispielsysteme	32

2.2.3.2	Abhängigkeit der maximalen Abweichung von der Rechenschrittweite	35
2.2.3.3	Abhängigkeit des Fehlers von der Rechnergenauigkeit	38
2.2.3.4	Einfluß des Systemgrades auf die Genauigkeit	38
2.2.3.5	Einfluß der Berechnungsart der Zählerkoeffizienten	41
2.2.3.6	Einfluß der Nullstellensuche	48
2.2.3.7	Darstellung der Pole und Nullstellen der diskreten Übertragungsfunktion für das begleitende Beispiel	51
2.2.4	Theoretische Betrachtung des Fehlerverlaufs	54
2.2.4.1	Prinzipieller Verlauf des Fehlers über der Zeit	55
2.2.4.2	Untersuchung der bleibenden Abweichung in Abhängigkeit von Rechenschrittweite und Systemparametern	57
2.3	Simulation mit Hilfe der Parallelstruktur	61
2.3.1	Transformationsmöglichkeiten der Teilsysteme	62
2.3.2	Vergleich mit Othmer-Verfahren	65
2.3.3	Vorteile und Beschränkungen beim Parallelverfahren	70
2.4	Das Anfangswertproblem	71
3.	Simulation der passiven Abzweigstruktur	83
3.1	Eine allgemeine Simulationsstruktur	83
3.1.1	Forderungen an die Struktur	83
3.1.2	Gewählte Struktur	84

	Seite
3.1.2.1 Zusammenstellung von Grundlagen	84
3.1.2.2 Transformation der gewünschten komplexen Widerstände	89
3.1.3 Realisierung von Allpaßanteilen	93
3.2 Anfangswerte bei Wellendigitalfilterstrukturen	100
3.2.1 Einzelelemente	101
3.2.2 Schwingkreise	104
3.2.3 Bemerkungen zur Anfangswertbestimmung	107
3.3 Test der Struktur an verschiedenen Beispielen	108
4. Vergleichende Gegenüberstellung der untersuchten Ver- fahren	117
4.1 Fehlerkriterien	117
4.2 Vergleichsmodell	118
4.3 Untersuchte Systeme	119
4.4 Verwendete Eingangsfunktionen	120
4.5 Messung der Genauigkeit der Verfahren	121
4.5.1 Sprungantwort	121
4.5.2 Rechteckantwort	129
4.5.3 Antwort auf abklingende Kosinuserregung	132
4.5.4 Rechenzeit	135
4.5.5 Produkt aus Rechenzeit und Fehler als Gütemaß	136
4.5.6 Vergleich der Ausgangsfunktion der einzelnen Verfahren bei einem System 87. Grades	140
4.6 Wahl eines Verfahrens bei vorgegebener Problem- stellung	143

5. Simulation mit Hilfe des digitalen Filters	145
6. Zusammenfassung	151
7. Anhang	152
Literaturverzeichnis	159

Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen

A	komplexe Amplitude einer einlaufenden Spannungswelle
$a(t)$	Zeitfunktion einer einlaufenden Spannungswelle
α_v	Koeffizienten von Paralleladaptoren
B	komplexe Amplitude einer auslaufenden Spannungswelle
$b(t)$	Zeitfunktion einer auslaufenden Spannungswelle
B_μ	Zählerkoeffizienten der Übertragungsfunktion $H(s)$
b_μ	Zählerkoeffizienten der Übertragungsfunktion $H_*(z)$
β_v	Koeffizienten von Serienadaptoren
C_v	Nennerkoeffizienten der Übertragungsfunktion $H(s)$
c_v	Nennerkoeffizienten der Übertragungsfunktion $H_*(z)$
$\varepsilon(kT)$	zeitlicher Fehlerverlauf zwischen simulierten und tatsächlichen Ausgangssignalwerten
$\varepsilon(t)$	zeitlicher Fehlerverlauf bei Echtzeitsimulation
$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon^2}$	normierter maximaler Fehler
ε	normierter mittlerer quadratischer Fehler
$h_{-1}(kT)$	Abtastwerte der Sprungantwort eines Systems
$h_{-1}(t)$	Sprungantwort eines Systems
$H(s)$	Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Systems
$H_v(s)$	Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Teilsystems
$H_*(z)$	Übertragungsfunktion eines diskreten Systems
$H_{v*}(z)$	Übertragungsfunktion eines diskreten Teilsystems
m	Zählergrad einer Übertragungsfunktion
n	Nennergrad einer Übertragungsfunktion
ε	komplexe Frequenz
$s_{0\mu}$	Nullstellen der kontinuierlichen Übertragungsfunktion
$s_{\infty v}$	Polstellen der kontinuierlichen Übertragungsfunktion
T	Abtastintervall $\hat{=}$ Rechenschrittweite
T_n	normierte Rechenschrittweite

$u(kT)$	Abtastwerte der Eingangsfunktion
$u(t)$	Eingangsfunktion
$y(kT)$	Abtastwerte der Ausgangsfunktion
$y_*(kT)$	Abtastwerte der simulierten Ausgangsfunktion
$y(t)$	Ausgangsfunktion
z	komplexe Frequenzvariable bei Folgen
$z_{0\mu}$	Nullstellen der diskreten Übertragungsfunktion
$z_{\infty\nu}$	Polstellen der diskreten Übertragungsfunktion

1. Einführung

Untersuchungen über das Verhalten umfangreicher Nachrichtenübertragungssysteme bei beliebigen Eingangsfunktionen können in geschlossener Form nicht mehr durchgeführt werden. Neben Messungen an einem Versuchsaufbau bleibt als einzige praktisch mögliche Untersuchungsmethode die Simulation an einem Rechner.

Da häufig nicht nur ein gegebenes System untersucht werden soll, sondern auch eine Optimierung der Systemparameter gewünscht wird, sind Methoden von Interesse, mit denen die Simulation mit geforderter Genauigkeit und minimalem Zeitaufwand durchgeführt werden kann. Die zu untersuchenden Systeme werden in der Regel zumindest abschnittsweise durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Sie stellen sehr wichtige Spezialfälle allgemeiner kontinuierlicher Systeme dar. Es erscheint daher sinnvoll, solche Algorithmen zu untersuchen, die unter Berücksichtigung der spezifischen Eigenschaften dieser Systeme effektiver sind als die allgemeinen Verfahren, die ja auch für die Integration nichtlinearer Differentialgleichungen geeignet sein müssen.

Daraus ergibt sich folgende Problemstellung:

Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes System durch seine Übertragungsfunktion $H(s)$ sowie eine im Prinzip beliebig lange Eingangsfunktion $u(t)$. Gesucht ist ein diskretes, durch $H_*(z)$ beschriebenes System, das bei Erregung mit Abtastwerten $u(t_k)$ Ausgangssignalwerte $y_*(t_k)$ liefert, die möglichst gut mit den Ausgangssignalwerten $y(t_k)$ des kontinuierlichen Systems für die äquidistanten Zeitpunkte

$$t_k = t_0 + kT \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

übereinstimmen. Hier ist t_0 irgendein Anfangszeitpunkt.

Zur Beurteilung der Güte der Übereinstimmung von $y_*(t_k)$ mit

$y(t_k)$ sind die Antworten verschiedener Systeme auf geeignet gewählte Eingangsfunktionen zu untersuchen.

Diese Aufgabenstellung ist in den letzten Jahren mehrfach behandelt worden (z.B. |1|, ...|15|, |35|, |36|). Dabei lassen sich zwei Grundprinzipien unterscheiden:

In einem Fall wird im wesentlichen die Fourier-Transformation zur Berechnung des Faltungsintegrals oder zur Lösung von Differentialgleichungen verwendet. Dabei wird weitgehend im Frequenzbereich gearbeitet |5|, |6|, |7|.

Das andere Grundprinzip beruht darauf, die Simulation als eine stabilitätserhaltende lineare Transformation zu formulieren, bei der es darauf ankommt, das gegebene kontinuierliche System in ein digitales derart zu transformieren, daß die Ausgangsfunktionen beider Systeme punktweise möglichst gut übereinstimmen. Hierbei erfolgt die eigentliche Simulation im Zeitbereich. Aus Gründen der numerischen Genauigkeit wird dabei das digitale System zweckmäßig als eine Kaskade von Blöcken zweiten Grades dargestellt. In bisherigen Arbeiten wurde dementsprechend eine blockweise Transformation eines kontinuierlichen Teilsystems zweiten Grades in ein diskretes zweiten Grades vorgenommen (|4|, |8|, |9|, |10|, |11|).

Aufbauend auf einer von Gorille in |14| vorgeschlagenen Transformation, die für diesen Fall im Sinne der oben genannten Aufgabe optimal ist, wurde von Othmer eine Transformation des Gesamtsystems vorgeschlagen, die zu einem minimalen Fehler führt |15|. Anschließend kann das diskrete System wieder in Teilsysteme aufgespalten werden.

Eine weitere Möglichkeit der Simulation im Zeitbereich besteht darin, von der Schaltungsstruktur eines elektrischen Netzwerkes auszugehen. Hierbei werden die einzelnen Bauelemente derart transformiert, daß sich ein digitales System ergibt, das den gewünschten Forderungen der Aufgabenstellung genügt. Die dabei entstehenden Strukturen wurden in den Arbeiten von Fettweis |16|, |17|, |18| als Wellendigitalfilterstrukturen vorgestellt.

Die vorliegende Arbeit stellt die oben genannten Verfahren zur Simulation im Zeitbereich einander vergleichend gegenüber. Es zeigt sich, daß eine eindeutige Antwort auf die Frage nach dem optimalen Verfahren nicht möglich ist. Vielmehr zeigt, abhängig von Details der Aufgabenstellung, jeweils eins der Verfahren Vorteile gegenüber den anderen.

2. Simulationsverfahren, die von der Übertragungsfunktion ausgehen

Bei den in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren wird von einer rationalen Übertragungsfunktion des kontinuierlichen Systems ausgegangen, die wie folgt dargestellt werden kann:

$$H(s) = B_m \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^m (s-s_{O\mu})}{\prod_{v=1}^n (s-s_{\infty v})} = \frac{\sum_{\mu=0}^m B_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{v=0}^n C_v s^v} \quad (2.1a)$$

Bei einfachen Polen gilt außerdem:

$$H(s) \approx R_0 + \sum_{v=1}^n \frac{R_v}{s-s_{\infty v}} \quad (2.1b)$$

Ausgehend von einer dieser Darstellungen lassen sich mit Hilfe der unten beschriebenen Transformationen diskrete Übertragungsfunktionen $H_*(z)$ finden. Mit deren Hilfe kann man Ausgangssignalwerte errechnen, die die Abtastwerte der Ausgangsfunktion des kontinuierlichen Systems approximieren. Es sei

$$H_*(z) = b_m \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^m (z-z_{O\mu})}{\prod_{v=1}^n (z-z_{\infty v})} = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v z^v} \quad (2.2)$$

Zur Verbesserung der numerischen Genauigkeit wird das digitale System zweckmäßig als eine Kaskade oder Parallelanordnung von Blöcken zweiten Grades dargestellt. Dabei werden jeweils konjugiert komplexe Pole- bzw. Nullstellenpaare zu einem Block zusammengefaßt.

$$\text{Sei } H_{v*}(z) = \frac{b_{2v} z^2 + b_{1v} z + b_{0v}}{z^2 + c_{1v} z + c_{0v}} = \begin{cases} b_{2v} \cdot \frac{(z-z_{Ov})(z-z_{Ov}^*)}{(z-z_{\infty v})(z-z_{\infty v}^*)} & \text{für Kaskade} \\ \frac{R_v}{z-z_{\infty v}} + \frac{R_v^*}{z-z_{\infty v}^*} & \text{für Parallelanordnung} \end{cases} \quad (2.3)$$

mit der Struktur nach Bild 2.1.

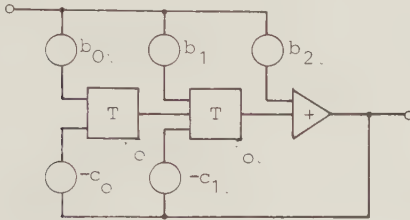


Bild 2.1: Struktur eines Teilsystems zweiten Grades

Dann ist für die

Kaskadenanordnung:

$$H_*(z) = \prod_{v=1}^K H_{v*}(z) \quad \left. \begin{array}{l} K = \frac{n}{2} \text{ für } n \text{ gerade} \\ \text{mit} \end{array} \right\}$$

Parallelanordnung:

$$H_*(z) = R_O + \sum_{v=1}^K H_{v*}(z) \quad K = \frac{n+1}{2} \text{ für } n \text{ ungerade}$$

Im Blockdiagramm ergibt sich daraus die Anordnung nach Bild 2.2.

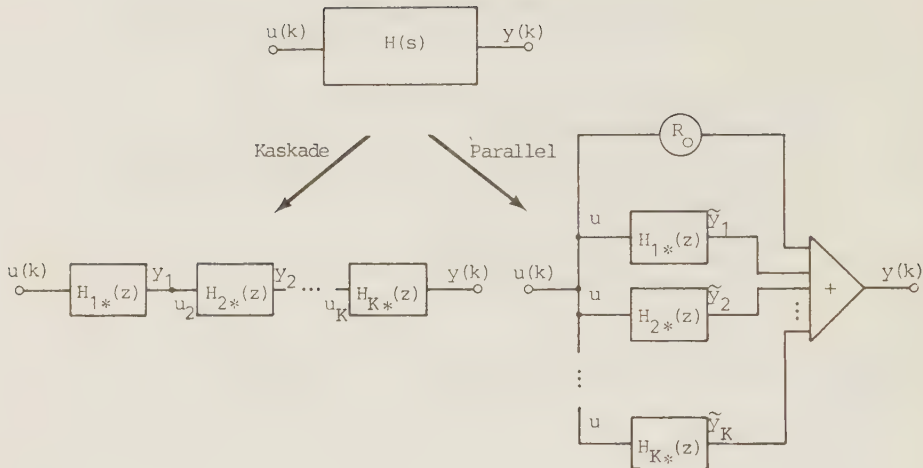


Bild 2.2: Aufspaltung des Systems in Kaskaden- oder Parallelstruktur

Anmerkung: Falls n ungerade ist, ergibt sich ein Teilsystem vom Grad 1.

2.1 Zusammenstellung bereits bekannter und getesteter Verfahren

2.1.1 Z-Transformation (Impulsinvariante Transformation)

Liegt eine Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion vor, die bei einfachen Polen in der Form

$$H(s) = R_0 + \sum_{v=1}^n \frac{R_v}{s - s_{\infty v}}$$

geschrieben werden kann, so läßt sich eine impulsinvariante Transformation (z.B. [20], S. 82, [21]) formulieren der Art

$$h_0(t) = R_0 \cdot \delta_0(t) + \sum_{v=1}^n R_v e^{s_{\infty v} t} \longrightarrow h_0(kT) = R_0 \cdot \gamma_0(k) + \sum_{v=1}^n R_v z_{\infty v}^k$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Unterwirft man $h_o(kT)$ der z-Transformation, so erhält man die Übertragungsfunktion $H_*(z)$ eines digitalen Systems der Form

$$H(z) = R_o + \sum_{v=1}^n \frac{R_v}{z - z_{\infty v}} \quad \text{mit } z_{\infty v} = e^{s_{\infty v} T}$$

Die Transformation wurde in dieser Form nicht programmiert, da sie nur die Impulsantwort des Systems exakt berechnet. Jedoch wurde sie - im folgenden als Residuenrechnung bezeichnet - in modifizierter Form als Vergleichsrechnung für die anderen Verfahren herangezogen:

Sei

$$\tilde{H}(s) = U(s) \cdot H(s) = \sum_{\lambda=1}^L \frac{\tilde{R}_{\lambda}}{s - \tilde{s}_{\infty \lambda}}$$

wobei unter $\tilde{s}_{\infty \lambda}$ die Pole von $U(s)$ und $H(s)$ zu verstehen sind, dann lassen sich exakte Ausgangssignalwerte

$$y(kT) = \tilde{h}_o(kT) = \sum_{\lambda=1}^L \tilde{R}_{\lambda} \cdot \tilde{z}_{\infty \lambda}^k \quad \text{mit } \tilde{z}_{\infty \lambda} = e^{\tilde{s}_{\infty \lambda} T}$$

errechnen, wenn

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

die rationale Laplace-Transformierte der Eingangsfunktion $u(t)$ ist.

2.1.2 Matched Z-Transformation

Bei der matched Z-Transformation werden Pole und Nullstellen von $H(s)$ (Gl. 2.1) nach gleichen Vorschriften transformiert.

$$z_{\infty v} = e^{s_{\infty v} T} ; \quad z_{o\mu} = e^{s_{o\mu} T}$$

Damit ergibt sich die diskrete Übertragungsfunktion zu

$$H_*(z) = B_m \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^m (z - e^{s_{o\mu} T})}{\prod_{v=1}^n (z - e^{s_{\infty v} T})}$$

Damit bleiben Stabilität, Minimalphasigkeit und Allpaßeigenschaft des Systems auch im z -Bereich erhalten. Von diesen Frequenzbereichseigenschaften kann jedoch nicht auf optimale Erfüllung der in Abschn. 1 angeführten Aufgabenstellung im Zeitbereich geschlossen werden.

Zur Simulation wird das Gesamtsystem wie oben beschrieben in eine Kaskade von Blöcken zweiten Grades zerlegt und jeder dieser Einzelblöcke transformiert.

2.1.3 Bilineare Transformation

Auch hier wird zunächst die Übertragungsfunktion $H(s)$ in Teilfunktionen zweiten Grades aufgespalten. Die Transformation $|8|, |14|, |20|$ geschieht dann durch Approximation des Integrationsoperators $1/s$ durch die folgende Beziehung

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \quad T: \text{Abtastintervall}$$

Damit ergeben sich die Koeffizienten der v -ten diskreten Übertragungsfunktion $H_{v*}(z)$ zu (vgl. dazu $|14|$)

$$\begin{aligned} b_2 &= B_2 + \frac{T}{2} B_1 + \frac{T^2}{4} B_0 & c_2 &= C_2 + \frac{T}{2} C_1 + \frac{T^2}{4} C_0 \\ b_1 &= \frac{T^2}{2} B_0 - 2B_2 & c_1 &= \frac{T^2}{2} C_0 - 2C_2 \\ b_0 &= B_2 - \frac{T}{2} B_1 + \frac{T^2}{4} B_0 & c_0 &= C_2 - \frac{T}{2} C_1 + \frac{T^2}{4} C_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

wenn

$$H_v(s) = \frac{B_2 s^2 + B_1 s + B_0}{C_2 s^2 + C_1 s + C_0} \quad \text{und} \quad H_{v*}(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{c_2 z^2 + c_1 z + c_0}$$

Entsprechend ergibt sich für ein Teilsystem ersten Grades:

$$b_1 = \frac{T}{2} B_0 + B_1 \quad c_1 = \frac{T}{2} C_0 + C_1$$

$$b_0 = \frac{T}{2} B_0 - B_1 \quad c_0 = \frac{T}{2} C_0 - C_1$$

2.1.4 Das Verfahren nach Boxer und Thaler

Boxer und Thaler [11], [12] versuchten den Integrationsoperator $1/s$ besser als bei der bilinearen Transformation zu approximieren. Sie verwenden für jede Potenz von $1/s$ eine andere Beziehung. Gorille hat gezeigt, daß jedoch nur bis $\frac{1}{s^2}$ eine stabile Transformation möglich ist [13]. Es ist

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

$$\frac{1}{s^2} \rightarrow \frac{T^2}{12} \cdot \frac{z^2+10z+1}{(z-1)^2}$$

Für die Koeffizienten erhält man damit für ein

- System 2. Grades:

$$\begin{aligned} b_2 &= B_2 + \frac{T}{2} B_1 + \frac{T^2}{12} B_0 & c_2 &= C_2 + \frac{T}{2} C_1 + \frac{T^2}{12} C_0 \\ b_1 &= \frac{5T^2}{6} B_0 - 2B_2 & c_1 &= \frac{5T^2}{6} C_0 - 2C_2 \\ b_0 &= B_2 - \frac{T}{2} B_1 + \frac{T^2}{12} B_0 & c_0 &= C_2 - \frac{T}{2} C_1 + \frac{T^2}{12} C_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

- System 1. Grades:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{T}{2} B_0 + B_1 & c_1 &= \frac{T}{2} C_0 + C_1 \\ b_0 &= \frac{T}{2} B_0 - B_1 & c_0 &= \frac{T}{2} C_0 - C_1 \end{aligned}$$

Die in [13] angegebene Stabilitätsbedingung für Systeme 2. Ordnung ist dabei stets zu beachten:

$$T < \sqrt{6 \frac{C_2}{C_0}}$$

2.1.5 Transformation nach Pottle

Pottle hat in [10] ein Verfahren zur Berechnung linearer Systeme vorgeschlagen, dessen Fehler mit T^4 gegen Null strebt. Er geht ebenfalls von der Kaskadierung des ursprünglichen Systems aus und transformiert jeden Block zweiten Grades getrennt.

Das v -te Teilsystem sei von der Form

$$H_v(s) = \frac{B_2 s^2 + B_1 s + B_0}{s^2 + C_1 s + C_0}$$

Die Struktur des transformierten Systems erläutert Bild 2.3.

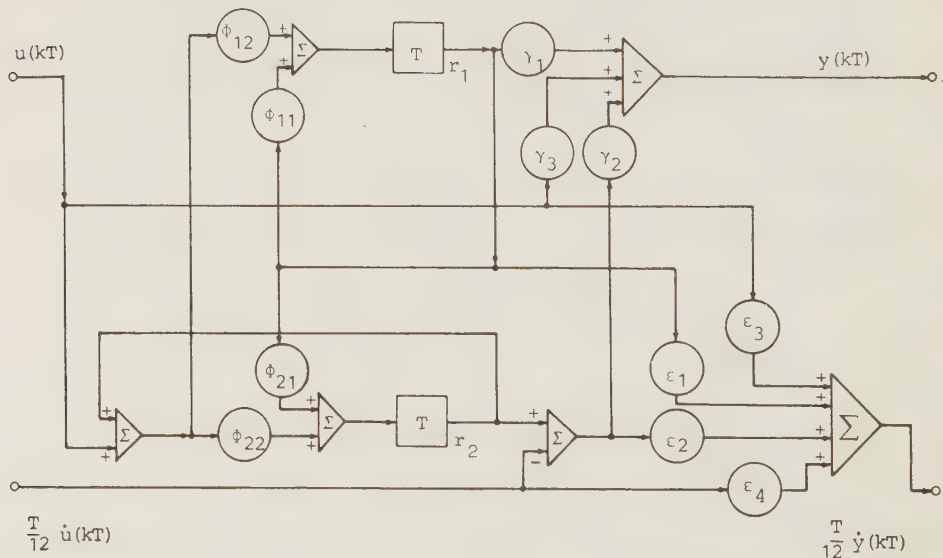


Bild 2.3: Struktur eines Teilsystems nach Pottle

Mit

$$\gamma_1 = T(B_0 - C_0 B_2),$$

$$\gamma_2 = T(B_1 - C_1 B_2),$$

$$\gamma_3 = \frac{T}{12} \gamma_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{T}{12} C_1\right) \gamma_2 + B_2,$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{T}{12} C_0 \gamma_2,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{T}{12} (\gamma_1 - C_1 \gamma_2),$$

$$\varepsilon_3 = \frac{T}{12} \varepsilon_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{T}{12} C_1\right) \varepsilon_2 + \frac{1}{12} \gamma_2, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_4 = B_2.$$

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

Die Ableitung der Eingangsfunktion für den ersten Block braucht nicht bekannt zu sein, da im ersten Block das Faltungsintegral mit Hilfe der Simpson-Regel approximiert wird. Dennoch ist das Verfahren sehr aufwendig (11 Multiplikationen pro Teilsystem) und benötigt entsprechend viel Rechenzeit (vgl. Kap. 4.5.3).

2.1.6 Transformation nach Gorille

Die Idee, die der Transformation nach Gorille zugrunde liegt, besteht darin, das Faltungsintegral zur Berechnung der Zeitantwort des Systems so genau wie möglich zu lösen. Die Lösung wird exakt, wenn die Eingangsfunktion ein Polygon ist. Das Faltungsintegral wird dazu für einen Block zweiten Grades analytisch gelöst ($|4|, |14|$).

Nach Aufspaltung in Teilsysteme und anschließender Transformation der einzelnen Blöcke wird jedoch unter den erwähnten Voraussetzungen nur die Ausgangsfunktion des ersten Teilsystems exakt. Alle nachfolgenden Teilsysteme werden von der Ausgangsfunktion des jeweils vorherigen Teilsystems erregt, die i.a. kein Polygon mehr ist. Daher macht man auch hier einen prin-

zipiellen Fehler bei der Transformation.

Die Beziehungen für die Transformation der Zählerkoeffizienten eines Teilsystems lauten:

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{p_2} (q_0 T + q_1 p_2) (e^{p_2 - 1 - p_2}) - \frac{1}{p_1} (q_0 T + q_1 p_1) (e^{p_1 - 1 - p_1}) \right] + q_2 \\
 b_1 &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{e^{p_1}}{p_1} (q_0 T + q_1 p_1) (1 - p_1 - e^{-p_1}) - \frac{e^{p_2}}{p_2} (q_0 T + q_1 p_2) (1 - p_2 - e^{-p_2}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{p_2}}{p_1} (q_0 T + q_1 p_1) (e^{p_1 - 1 - p_1}) - \frac{e^{p_1}}{p_2} (q_0 T + q_1 p_2) (e^{p_2 - 1 - p_2}) \right] - (e^{p_1 + p_2}) q_2 \\
 b_0 &= \frac{e^{p_1 + p_2}}{\Delta} \left[\frac{1}{p_2} (q_0 T + q_1 p_2) (1 - p_2 - e^{-p_2}) - \frac{1}{p_1} (q_0 T + q_1 p_1) (1 - p_1 - e^{-p_1}) \right] + e^{p_1 + p_2} q_2
 \end{aligned}$$

(2.7)

wobei:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= s_{\infty 1} T & q_2 &= B_2 \\
 p_2 &= s_{\infty 2} T & q_1 &= B_1 - B_2 \cdot C_1 \\
 \Delta &= s_{\infty 2} - s_{\infty 1} & q_0 &= B_0 - B_2 \cdot C_0
 \end{aligned}$$

Der Nenner transformiert sich bei Gorille stabilitätserhaltend nach der Beziehung

$$z_{\infty v} = e^{s_{\infty v} T}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -(e^{s_{\infty 1} T} + e^{s_{\infty 2} T}) \\
 c_0 &= e^{(s_{\infty 1} + s_{\infty 2}) T}
 \end{aligned}$$

(2.8)

2.2 Das Verfahren nach Othmer

Die Idee, das Faltungsintegral bei Kenntnis von Eigenschaften der Eingangsfunktion analytisch zu lösen, wurde von Othmer in [15] auf das Gesamtsystem erweitert. Das Verfahren liefert theoretisch exakt die Abtastwerte der Ausgangsfunktion des kontinuierlichen Systems, wenn die Eingangsfunktion dargestellt werden kann als:

$$\underline{u}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{G}(t-t_k) * \underline{u}_k \quad (2.9)$$

Im allgemeinen Fall ist $\underline{G}(t)$ eine Matrix mit m Zeilen und m_1 Spalten, deren Elemente außerhalb des Intervalls $0 \leq \tau < T$ identisch verschwindende Zeitfunktionen sind, und es ist

$$t_k = t_0 + kT \quad (k = 0, 1, \dots)$$

(t_0 : Anfangszeitpunkt)

$\underline{u}_k$ ist ein m -dimensionaler Spaltenvektor, dessen Komponenten beliebige reelle Zahlen sein können.

Für den im folgenden betrachteten Fall, daß $u(t)$ skalar ist, wird $\underline{G}(t)$ zu einem Vektor. Für $u(t)$ führt die weitere Spezialisierung von $\underline{G}(t)$ z.B. auf Polygonzug und Treppenfunktion (vgl. Abschn. 2.2.2.1 und 2.2.2.2).

Im folgenden sollen nur Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang betrachtet werden. Die in [15] beschriebene Transformationsmethode liefert dann ein diskretes System mit der Übertragungsfunktion $H_*(z)$, das z.B. in der folgenden Struktur darstellbar ist:

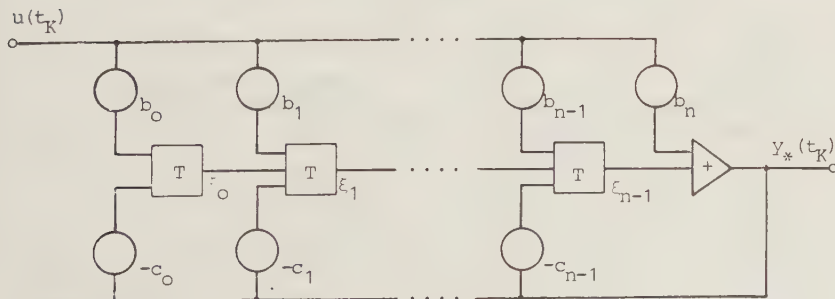


Bild 2.4: Struktur des diskreten Systems in direkter Form

2.2.1 Transformation des Nenners der Übertragungsfunktion

Die Nennerkoeffizienten von $H_*(z)$ errechnen sich aus den Polen $z_{\infty v}$, die sich direkt aus den Polen $s_{\infty v}$ des kontinuierlichen Systems stabilitätserhaltend transformieren:

$$z_{\infty v} = e^{s_{\infty v} T}$$

$$\text{und} \quad \sum_{v=0}^n c_v z^v = \prod_{\mu=1}^n (z - e^{s_{\infty \mu} T}) ; \quad c_n = 1 \quad (2.10)$$

vgl. dazu auch Gl. (2.8).

2.2.2 Bestimmung der Zählerpolynomkoeffizienten

Das kontinuierliche System besitze die in Gl. (2.1) dargestellte Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{\sum_{\mu=0}^m B_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{v=0}^n C_v s^v}$$

und werde im Zustandsraum beschrieben durch

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u \\ y &= \underline{C} \underline{x} + D u \end{aligned} \quad (2.11)$$

In der 1. kanonischen Form haben die Matrizen die Gestalt:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -C_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -C_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -C_{n-3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} B_{n-1} & -B_n \cdot C_{n-1} \\ B_{n-2} & -B_n \cdot C_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ B_0 & -B_n \cdot C_0 \end{bmatrix}$$

(2.12a)

$$\underline{C} = (1, 0, \dots, 0)$$

$$D = B_n$$

und in der 2. kanonischen Form

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -C_0 & -C_1 & -C_2 & \dots & -C_{n-1} \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = (B_0 - B_n \cdot C_0, B_1 - B_n \cdot C_1, \dots, B_{n-1} - B_n \cdot C_{n-1})$$

(2.12b)

$$D = B_n$$

Die Grundbeziehung zur Berechnung der Zählerkoeffizienten der diskreten Übertragungsfunktion lautet nach [15]:

$$b_{n-\lambda} = c_{n-\lambda} \cdot D \cdot \underline{G}(0) + \int_0^T \phi_{\lambda-1}(T-\tau) \cdot \underline{G}(\tau) d\tau$$

mit

$$\phi_{\lambda}(t) = \begin{cases} \underline{C} \cdot \left(\sum_{v=0}^{\lambda} c_{n-v} e^{\underline{A}T(\lambda-v)} \right) e^{\underline{A}t} \cdot \underline{B} & \forall t \in [0, T) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.13)$$

$\lambda = 0, \dots, n$;

$\underline{G}(t)$ ist die in Gl. (2.9) definierte Funktion,

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, D die oben definierten Matrizen bzw. Vektoren.

2.2.2.1 Beziehungen bei linearer Interpolation der Eingangssignalwerte

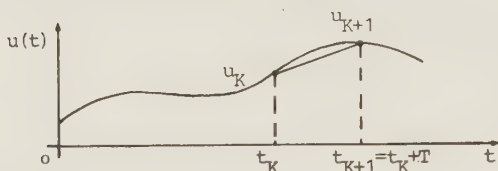


Bild 2.5: Lineare Interpolation der Eingangsfunktion

Bei linearer Interpolation der Eingangsfunktion gilt:

$$u(t_K + \tau) = \frac{u_{K+1} - u_K}{T} \cdot \tau + u_K \quad 0 \leq \tau < T \quad (2.14)$$

Betrachtet man $u(t)$ wie in Gl. (2.9) zusammengesetzt aus einzelnen Signalabschnitten der Dauer T , so ergibt sich für einen Abschnitt:

$$u_K(\tau) = \begin{cases} u_K(t_K + \tau) & 0 \leq \tau < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit Gl. (2.14) als Skalarprodukt geschrieben:

$$u_K(\tau) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\tau}{T}, & \frac{\tau}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_K \\ u_{K+1} \end{bmatrix} \quad .$$

Mit $u_K(\tau) = \underline{G}(\tau) \cdot \underline{u}_K$

ergibt sich für die lineare Interpolation:

$$\underline{G}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\tau}{T}, & \frac{\tau}{T} \end{bmatrix}$$

und $\underline{u}_K = \begin{bmatrix} u_K \\ u_{K+1} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.15)$

Demnach erhält man durch Einsetzen von Gl. (2.15) in Gl. (2.13)

für lineare Interpolation folgende vektoriellen Koeffizienten

$$\underline{b}_{n-\lambda} = (b_{(n-\lambda)1}, b_{(n-\lambda)2}) :$$

$$\begin{aligned} \underline{b}_{n-\lambda} &= (c_{n-\lambda} \cdot B_n, 0) + \int_0^T \left(\sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot e^{\underline{A}((\lambda-v)T-\tau)} \right) \cdot \underline{B} \cdot \left(1 - \frac{\tau}{T}, \frac{\tau}{T}\right) d\tau \\ &= (c_{n-\lambda} \cdot B_n, 0) + \int_0^T \left(\sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot (\underline{C} \cdot e^{\underline{A}((\lambda-v)T-\tau)} \cdot \underline{B}) \right) \cdot \left(1 - \frac{\tau}{T}, \frac{\tau}{T}\right) d\tau \end{aligned}$$

$$\lambda = 0, \dots, n \quad (2.16)$$

a) Setzt man die Beziehungen von (2.12a) für die 1. kanonische Form in (2.16) ein, so ergeben sich folgende Komponenten für die Zählerkoeffizienten

$$\begin{aligned} b_{(n-\lambda)1} &= c_{n-\lambda} \cdot B_n + \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \left(\sum_{\kappa=1}^n (B_{n-\kappa} - B_n \cdot C_{n-\kappa}) \int_0^T e_{1\kappa v} d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{T} \cdot \sum_{\kappa=1}^n (B_{n-\kappa} - B_n \cdot C_{n-\kappa}) \int_0^T e_{1\kappa v} \cdot \tau d\tau \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$b_{(n-\lambda)2} = \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot \frac{1}{T} \sum_{\kappa=1}^n (B_{n-\kappa} - B_n \cdot C_{n-\kappa}) \int_0^T e_{1\kappa v} \cdot \tau d\tau$$

Dabei seien die $e_{1\kappa v}$ definiert als Elemente des ersten Zeilenvektors der Matrix $e^{\underline{A}((\lambda-v)T-\tau)}$ mit

$$e^{\underline{A}((\lambda-v)T-\tau)} = \begin{bmatrix} e_{11v}(\tau) & e_{12v}(\tau) & \dots & e_{1nv}(\tau) \\ e_{21v}(\tau) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ e_{n1v}(\tau) & \dots & \dots & e_{nnv}(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Zur Bestimmung von $e^{\underline{A}t}$ wird folgende weitere Einschränkung

gemacht:

Es sollen nur Systeme mit einfachen Polen betrachtet werden. Dann ergibt sich $\underline{e}^{\underline{A}t}$ durch folgende Diagonalisierung:

$$\underline{e}^{\underline{A}t} = \underline{M} \cdot \underline{e}^{\underline{\Lambda}t} \cdot \underline{M}^{-1}$$

mit

$$\underline{e}^{\underline{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{s_{\infty 1}t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_{\infty 2}t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{s_{\infty n}t} \end{bmatrix}$$

Die Elemente von $\underline{M}$ errechnen sich zu: (|54|)

$$x_{\mu\kappa} = \sum_{v=1}^{\mu} C_{n-\mu+v} \cdot s_{\infty\kappa}^{v-1}$$

μ : Zeile $\mu = 1, \dots, n$

κ : Spalte $\kappa = 1, \dots, n$

Seien die Elemente der inversen Matrix $\underline{M}^{-1}$ mit

$$m_{\mu\kappa} \quad \begin{array}{l} \mu = 1, \dots, n \\ \kappa = 1, \dots, n \end{array}$$

bezeichnet. Dann ergibt sich für ein Element des ersten Zeilenvektors von $\underline{e}^{\underline{A}((\lambda-v)T-\tau)}$:

$$e_{1\kappa v}(\tau) = \sum_{\mu=1}^n e^{s_{\infty\mu}((\lambda-v)T-\tau)} \cdot m_{\mu\kappa}$$

Diese Beziehung eingesetzt in Gl. (2.17) ergibt nach Integration und einigen Zwischenschritten die programmierbaren Beziehungen für die beiden Komponenten der $\underline{b}_{\lambda}$ (bei linearer Interpolation):

$$\begin{aligned}
 b_{(n-\lambda)1} &= c_{n-\lambda} \cdot B_n + \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot \sum_{\kappa=1}^n (B_{n-\kappa} - B_n \cdot C_{n-\kappa}) \cdot \sum_{\mu=1}^n e^{s_{\infty\mu}(\lambda-v)T} \cdot m_{\mu\kappa} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{1}{s_{\infty\mu}} \left((1 - e^{-s_{\infty\mu}T}) - \frac{1}{T \cdot s_{\infty\mu}} (1 - s_{\infty\mu}T e^{-s_{\infty\mu}T} - e^{-s_{\infty\mu}T}) \right) \\
 b_{(n-\lambda)2} &= \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot \sum_{\kappa=1}^n (B_{n-\kappa} - B_n \cdot C_{n-\kappa}) \sum_{\mu=1}^n e^{s_{\infty\mu}(\lambda-v)T} \cdot m_{\mu\kappa} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{1}{T(s_{\infty\mu})^2} \cdot (1 - s_{\infty\mu}T e^{-s_{\infty\mu}T} - e^{-s_{\infty\mu}T}) \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Die Elemente $m_{\mu\kappa}$ der inversen Modalmatrix werden numerisch mit Hilfe eines allgemeinen Matrix-Inversionsprogrammes ermittelt.

b) Für die zweite kanonische Form setzt man die Beziehungen von (2.12b) in (2.16) ein und erhält

$$\begin{aligned}
 b_{(n-\lambda)1} &= c_{n-\lambda} \cdot B_n + \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^n (B_{\kappa-1} - B_n \cdot C_{\kappa-1}) \cdot \int_0^T e_{\kappa n v} d\tau - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{T} \cdot \sum_{\kappa=1}^n (B_{\kappa-1} - B_n \cdot C_{\kappa-1}) \int_0^T e_{\kappa n v} \cdot \tau d\tau \right) \quad (2.20) \\
 b_{(n-\lambda)2} &= \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot \frac{1}{T} \sum_{\kappa=1}^n (B_{\kappa-1} - B_n \cdot C_{\kappa-1}) \cdot \int_0^T e_{\kappa n v} \cdot \tau d\tau
 \end{aligned}$$

Die $e_{\kappa n v}$ sind hier definiert als die Elemente des n -ten Spaltenvektors der in Gl. (2.18) definierten Matrix $e^{\underline{A}((\lambda-v)T-\tau)}$.

Die Bestimmung von $e^{\underline{A}t}$ erfolgt wie unter a), jedoch mit anderen Matrizen $\underline{M}$ und $\underline{M}^{-1}$

Sei $s_{\infty\mu}((\lambda-v)T-\tau) : = \delta_{\mu}$

Dann ist

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_{\infty 1} & s_{\infty 2} & \dots & s_{\infty n} \\ s_{\infty 1}^2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{\infty 1}^{n-1} & s_{\infty 2}^{n-1} & \dots & s_{\infty n}^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{wegen} \quad (2.12b)$$

und

$$e^{-\underline{A}((\lambda-\nu)T-\tau)} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{bmatrix}$$

Sei $\underline{M}' = \underline{M} \cdot e^{-\underline{A}((\lambda-\nu)T-\tau)}$

und $\underline{M}^{-1} = \underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_n$

dann ergibt sich die nach Gl. (2.20) notwendige letzte Spalte von $e^{-\underline{A}((\lambda-\nu)T-\tau)}$ zu:

$$\underline{e}_n = \underline{M}' \cdot \underline{m}_n$$

Der Vektor $\underline{m}_n$ wird aus der Beziehung $\underline{M} \underline{M}^{-1} = \underline{E}$ errechnet. Es ist

$$\underline{M} \cdot \underline{m}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Damit lassen sich die Komponenten von $\underline{m}_n$ nach CRAMER berechnen.

Allgemein gilt für die μ -te Komponente

$$m_{\mu n} = \frac{1}{|M|} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ s_{\infty 1} & \dots & s_{\infty \mu-1} & \vdots & s_{\infty \mu+1} & \dots & s_{\infty n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots & & \vdots \\ s_{\infty 1}^{n-1} & \dots & s_{\infty \mu-1}^{n-1} & 1 & s_{\infty \mu+1}^{n-1} & \dots & s_{\infty n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^\mu \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{|M|} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_{\infty 1} & \dots & s_{\infty \mu-1} & s_{\infty \mu+1} & \dots & s_{\infty n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{\infty 1}^{n-2} & \dots & s_{\infty \mu-1}^{n-2} & s_{\infty \mu+1}^{n-2} & \dots & s_{\infty n}^{n-2} \end{vmatrix}$$

(Entwicklung nach der μ -ten Spalte)

Da es sich bei $\underline{M}$ und deren hier benötigten Untermatrizen (bzw. -determinanten) stets um Vandermond'sche Matrizen (bzw. Determinanten) handelt, können die obigen Determinanten wie folgt berechnet werden:

$$\det \underline{V} = \prod_{i>k} (a_i - a_k),$$

wenn

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Damit lassen sich die Elemente $m_{\mu n}$ des Vektors $\underline{m}_n$ ohne Matrixinversion berechnen.

Die Komponenten des n-ten Spaltenvektors von $e^{\underline{A}((\lambda-v)T-\tau)}$ ergeben sich daher zu

$$e_{\kappa n v}(\tau) = \sum_{\mu=1}^n s_{\infty \mu}^{\kappa-1} \cdot e^{s_{\infty \mu}(\lambda-v)T} \cdot e^{-s_{\infty \mu}\tau} \cdot m_{\mu n} \quad \kappa=1, \dots, n$$

Eingesetzt in (2.20) errechnen sich die programmierbaren Beziehungen für die 2. kanonische Form:

$$\begin{aligned} b_{(n-\lambda)1} &= c_{n-\lambda} \cdot B_n + \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot \sum_{\kappa=1}^n (B_{\kappa-1} - B_n \cdot C_{\kappa-1}) \cdot \sum_{\mu=1}^n s_{\infty \mu}^{\kappa-1} \cdot \\ &\cdot e^{s_{\infty \mu}(\lambda-v)T} \cdot m_{\mu n} \cdot \frac{1}{s_{\infty \mu}} ((1 - e^{-s_{\infty \mu}T}) - \frac{1}{T \cdot s_{\infty \mu}} (1 - s_{\infty \mu} T e^{s_{\infty \mu}T} - \\ &- e^{-s_{\infty \mu}T})) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} b_{(n-\lambda)2} &= \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot \sum_{\kappa=1}^n (B_{\kappa-1} - B_n \cdot C_{\kappa-1}) \cdot \sum_{\mu=1}^n s_{\infty \mu}^{\kappa-1} \cdot e^{s_{\infty \mu}(\lambda-v)T} \cdot m_{\mu n} \cdot \\ &\frac{1}{T(s_{\infty \mu})^2} (1 - s_{\infty \mu} T e^{-s_{\infty \mu}T} - e^{-s_{\infty \mu}T}) \end{aligned}$$

Auf die eben beschriebene Art erhält man bei linearer Interpolation ein System mit einem skalaren Ausgang und einem vektoriellen Eingang mit zwei Komponenten. Man kann jedoch die Komponenten $b_{(n-\lambda)1}$ und $b_{(n-\lambda)2}$ geeignet zusammenfassen, so daß für die Aufspaltung in Teilsysteme zweiten Grades wieder ein skalares System mit einem Eingang und einem Ausgang vorliegt.

Die Ausgangssignalwerte des digitalen Systems errechnen sich nach der Rekursionsbeziehung:

$$\sum_{\lambda=0}^k c_{n-\lambda} y_{k-\lambda} = \sum_{\lambda=0}^k b_{n-\lambda} u_{k-\lambda} \quad k = 0, \dots, n-1; \quad c_n = 1$$

bzw.

$$\sum_{\lambda=0}^n c_{n-\lambda} y_{k-\lambda} = \sum_{\lambda=0}^n b_{n-\lambda} u_{k-\lambda} \quad k \geq n$$

Unter der Annahme der linearen Interpolation und der Exaktheit der Ausgangssignalwerte $y_{*k} = y_k$ und $\underline{u}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{bmatrix}$ erhält man:

$$\sum_{\lambda=0}^n c_{n-\lambda} y_{k-\lambda} = \sum_{\lambda=0}^n (b_{(n-\lambda)1} u_{k-\lambda} + b_{(n-\lambda)2} u_{k+1-\lambda}) \quad (2.22)$$

$$k \geq n$$

Nach Gl. (2.19) bzw. (2.21) ergeben sich für $\lambda = 0$:

$$b_{n1} = c_n \cdot B_n$$

$$b_{n2} = 0$$

d.h. man kann Gl. (2.22) auch so schreiben:

$$\sum_{\lambda=0}^n c_{n-\lambda} y_{k-\lambda} = \left(\sum_{\lambda=0}^{n-1} (b_{(n-\lambda)1} + b_{(n-\lambda-1)2}) \cdot u_{k-\lambda} \right) + b_{01} u_{k-n}$$

$$k \geq n$$

Mit den Definitionen

$$b_{n-\lambda} := (b_{(n-\lambda)1} + b_{(n-\lambda-1)2}) \quad \lambda=0, 1, \dots, n-1$$

$$b_0 := b_{01} \quad \lambda=n$$

erhält man

$$\sum_{\lambda=0}^n c_{n-\lambda} y_{k-\lambda} = \sum_{\lambda=0}^n b_{n-\lambda} u_{k-\lambda} \quad k \geq n \quad (2.23a)$$

Das so gewonnene kausale skalare System n-ten Grades kann man nun mit Hilfe eines Nullstellensuchprogrammes in Teilsysteme zweiten Grades gemäß der unter Punkt 2 geschilderten Methode aufspalten.

Betrachtet man jedoch die ersten n Abtastwerte $y_0, \dots, y_{n-1}$, so erhält man folgende Beziehung

$$\sum_{\lambda=0}^k c_{n-\lambda} y_{k-\lambda} = \left(\sum_{\lambda=0}^{k-1} b_{n-\lambda} u_{k-\lambda} \right) + b_{(n-k)1} \cdot u_0 \quad k=0, \dots, n-1 \quad (2.23b)$$

Man erhält also für $k \geq n$ die Ausgangssignalwerte aus anderen Koeffizienten als für $k = 0, \dots, n-1$.

Nun kann man aber Gl. (2.23b) auch so darstellen:

$$\sum_{\lambda=0}^k c_{n-\lambda} y_{k-\lambda} = \left(\sum_{\lambda=0}^k b_{n-\lambda} u_{k-\lambda} \right) - b_{(n-k-1)2} \cdot u_0 \quad k=0, \dots, n-1$$

d.h.: Speichert man zu Beginn in das skalare System, beschrieben durch die Übertragungsfunktion $H_*(z)$, die Anfangswerte

$$\xi_{n-\lambda} = -b_{(n-\lambda)2} \cdot u_0, \quad \lambda=1, \dots, n \quad (2.24)$$

ein (vgl. Bild 2.4), so errechnen sich die Ausgangssignalwerte y_k auch für $k < n$ aus denselben Koeffizienten wie für $k \geq n$.

Bei der Aufspaltung in Teilsysteme 2. Grades gehen diese Anfangswerte allerdings wieder verloren.

Die Beziehungen für lineare Interpolation wurden sowohl für die erste wie für die zweite kanonische Form programmiert und getestet. Die Ergebnisse waren wegen großer numerischer Ungenauigkeiten nicht befriedigend. Für die Untersuchung von Datenübertragungssystemen sind insbesondere treppenförmige Eingangssignale von Interesse. Diese werden im Folgenden näher behandelt.

2.2.2.2 Beziehungen bei treppenförmiger Approximation der Eingangssignalwerte

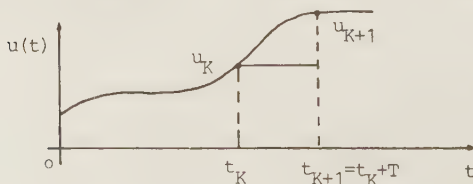


Bild 2.6: Treppenförmige Approximation der Eingangsfunktion

Es gilt:

$$u(t_k + \tau) = u(t_k) = u_k \quad \text{für } 0 \leq \tau < T$$

Damit erhält man für einen Signalabschnitt:

$$\left. \begin{aligned} u_k(\tau) &= \underline{G}(\tau) \cdot \underline{u}_k \\ \text{mit } \underline{G}(\tau) &: G(\tau) = 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{für } 0 \leq \tau < T \quad (2.25)$$

$$\text{und für } \underline{u}_k : u_k = u(t_k)$$

Setzt man das so gefundene $G(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T)$ in Gl. (2.13) ein, so ergeben sich folgende skalare Koeffizienten

$$b_{n-\lambda} = c_{n-\lambda} \cdot B_n + \int_0^T \underline{C} \cdot \left(\sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} e^{\underline{A}(\lambda-v)T-\tau} \right) \cdot \underline{B} \, d\tau$$

Analog zu den Ausführungen von 2.2.2.1 ergeben sich für die
1. kanonische Form von $H(s)$:

$$\begin{aligned} b_{n-\lambda} &= c_{n-\lambda} \cdot B_n + \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \sum_{\kappa=1}^n (B_{n-\kappa} - B_n \cdot C_{n-\kappa}) \cdot \sum_{\mu=1}^n e^{s_{\infty\mu}(\lambda-v)T} \cdot \\ &\quad \cdot m_{\mu\kappa} \cdot \frac{1}{s_{\infty\mu}} (1 - e^{-s_{\infty\mu}T}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

2. kanonische Form von $H(s)$:

$$\begin{aligned} b_{n-\lambda} &= c_{n-\lambda} \cdot B_n + \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} \cdot \sum_{\kappa=1}^n (B_{\kappa-1} - B_n \cdot C_{\kappa-1}) \cdot \sum_{\mu=1}^n s_{\infty\mu}^{\kappa-1} \cdot e^{s_{\infty\mu}(\lambda-\mu)T} \cdot \\ &\quad \cdot m_{\mu n} \cdot \frac{1}{s_{\infty\mu}} (1 - e^{-s_{\infty\mu}T}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2.2.3 Berechnung der Zählerkoeffizienten aus Abtastwerten der Ausgangsfunktion

In einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit von Schenk [22] wird allgemein gezeigt, daß man bei bestimmter Eingangsfunktion aus Abtastwerten der Ausgangsfunktion die Zähler- und Nennerkoeffizienten des Systems bestimmen kann. Für den Fall, daß sich die Eingangsfunktion in der Form von Gl. (2.9) darstellen läßt, kann man aus den Abtastwerten der Ausgangsfunktion des mit einer unten beschriebenen Funktion erregten kontinuierlichen Systems auf die Zählerkoeffizienten der Übertragungsfunktion $H_*(z)$ des digitalen Systems schließen. Die Zählerkoeffizienten von $H_*(z)$ haben dabei die spezielle Form des in [15] beschriebenen Verfahrens von Othmer.

Das kontinuierliche System sei im Zustandsraum beschrieben durch die Gleichungen (2.11). Das Ausgangssignal $\underline{y}(t)$ des Systems ergibt sich dann zu

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot e^{\underline{A}t} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^t \underline{C} \cdot e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau) d\tau + \underline{D} \cdot \underline{u}(t) \quad (2.28)$$

$\underline{x}(0)$ sei der Vektor des Anfangszustandes im Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$.

Man betrachte nun eine Modifikation der in Gl. (2.9) vorgestellten Interpolationsfunktion $\underline{G}(t)$.

Es sei $\tilde{\underline{G}}(t)$ die über T hinaus stetig fortgesetzte Funktion von $\underline{G}(t)$. Dann läßt sich $\underline{G}(t)$ schreiben:

$$\underline{G}(t) = \tilde{\underline{G}}(t) \cdot (\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T)) \quad (2.29)$$

Verwendet man $\underline{G}(t)$ in dieser Form als Eingangsfunktion des Systems, so ergibt sich aus Gl. (2.28):

$$\underline{y}_G(t) = \underline{C} e^{\underline{A}t} \underline{x}(0) + \int_0^t \underline{C} e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \cdot \underline{\tilde{G}}(\tau) \cdot (\delta_{-1}(\tau) - \delta_{-1}(\tau-T)) d\tau$$

$$+ D \cdot \underline{G}(t) = \underline{C} e^{\underline{A}t} \underline{x}(0) + \int_0^t \underline{C} e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \cdot \underline{\tilde{G}}(\tau) \cdot \delta_{-1}(\tau) d\tau - \\ - \int_0^t \underline{C} e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \cdot \underline{\tilde{G}}(\tau) \cdot \delta_{-1}(\tau-T) d\tau + D \cdot \underline{G}(t)$$

$$\underline{y}_G(t) = \underline{C} e^{\underline{A}t} \underline{x}(0) + \int_0^t \underline{C} e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{B} \cdot \underline{\tilde{G}}(\tau) d\tau - \int_{\min(t,T)}^t \underline{C} e^{\underline{A}(t-\tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{\tilde{G}}(\tau) d\tau + D \cdot \underline{G}(t)$$

oder vereinfacht unter der Voraussetzung, daß $t > T$ ist:

$$\underline{y}_G(t) = \underline{C} e^{\underline{A}t} \underline{x}(0) + \int_0^T \underline{C} e^{\underline{A}(t-\tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{G}(\tau) d\tau + D \cdot \underline{G}(t) \quad (2.30)$$

Da nur von 0 bis T integriert wird, kann für $\tilde{G}(t)$ wieder $G(t)$ gesetzt werden. Die Funktion $G(t)$, die im additiven Glied bei D steht, kann nach wie vor nur für das Intervall $0 \leq t < T$ von Null verschieden werden, ist also 0 für $t > T$.

Betrachtet man nun Gl. (2.30) zu den diskreten Zeitpunkten

$$\kappa T + t_0 \quad \text{mit} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \\ \text{mit} \quad 0 \leq t_0 < T$$

so erhält man unter der Voraussetzung der Energiefreiheit des Systems im Anfangszustand

$$\underline{y}_G(\kappa T + t_0) = \int_0^T \underline{C} e^{\underline{A}(\kappa T + t_0 - \tau)} \underline{B} \underline{G}(\tau) d\tau \quad \text{für} \quad \kappa > 0 \quad (2.31)$$

und

$$\underline{y}_G(t_0) = \int_0^{t_0} \underline{C} e^{\underline{A}(t_0 - \tau)} \underline{B} \underline{G}(\tau) d\tau + D \cdot \underline{G}(t_0) \quad \text{für} \quad \kappa = 0$$

Da $G(t)$ nur im Intervall $0 \leq t < T$ definiert ist, tritt es außerhalb des Integrals nur für $\kappa = 0$ auf. Setzt man für κ :

$$\begin{aligned} \kappa &= \lambda - \nu & \text{mit} & & \lambda \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ & & & & \nu \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ & & \text{und} & & \lambda \geq \nu \end{aligned}$$

so lässt sich Gl. (2.31) auch so schreiben:

$$Y_G((\lambda - \nu)T + t_0) = \begin{cases} \int_0^T \underline{C} e^{\underline{A}((\lambda - \nu)T + t_0 - \tau)} \underline{B} \cdot \underline{G}(\tau) d\tau & \text{für } \lambda > \nu \\ \int_0^t \underline{C} e^{\underline{A}(t_0 - \tau)} \underline{B} \cdot \underline{G}(\tau) d\tau + D \cdot \underline{G}(t_0) & \text{für } \lambda = \nu \end{cases} \quad (2.32)$$

Multipliziert man zu jedem Abtastwert in einem Zeitpunkt $(\lambda - \nu)T + t_0$ einen Faktor $c_{n-\nu}$ und summiert die so erhaltenen Werte über ν bis λ auf, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\lambda} c_{n-\nu} Y_G((\lambda - \nu)T + t_0) &= \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} c_{n-\nu} \int_0^t \underline{C} e^{\underline{A}((\lambda - \nu)T + t_0 - \tau)} \underline{B} \underline{G}(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} c_{n-\nu} \int_{t_0}^T \underline{C} e^{\underline{A}((\lambda - \nu)T + t_0 - \tau)} \underline{B} \underline{G}(\tau) d\tau + \\ &+ c_{n-\lambda} D \underline{G}(t_0) + c_{n-\lambda} \int_0^{t_0} \underline{C} e^{\underline{A}(t_0 - \tau)} \underline{B} \underline{G}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{\nu=0}^{\lambda} c_{n-\nu} \int_0^{t_0} \underline{C} e^{\underline{A}((\lambda - \nu)T + t_0 - \tau)} \underline{B} \underline{G}(\tau) d\tau \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} c_{n-\nu} \int_{t_0}^T \underline{C} e^{\underline{A}((\lambda - \nu)T + t_0 - \tau)} \underline{B} \underline{G}(\tau) d\tau \\ &+ c_{n-\lambda} D \underline{G}(t_0) \end{aligned}$$

Vertauscht man Summation und Integration, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\lambda} c_{n-\nu} Y_G((\lambda - \nu)T + t_0) &= c_{n-\lambda} \cdot D \underline{G}(t_0) + \\ &+ \int_0^{t_0} \underline{C} \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda} c_{n-\nu} e^{\underline{A}((\lambda - \nu)T + t_0 - \tau)} \underline{B} \underline{G}(\tau) d\tau + \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$+ \int_{t_0}^T \underline{c} \cdot \sum_{v=0}^{\lambda-1} c_{n-v} e^{\underline{A}((\lambda-v)T+t_0-\tau)} \underline{B} \cdot \underline{G}(\tau) d\tau$$

Vergleicht man die rechte Seite der Gl. (2.33) mit der Definitionsgleichung für die Zählerkoeffizienten des diskreten Systems in [15], bzw. für $t_0 = 0$ mit Gl. (2.13), so stellt man Identität fest. Man kann daher auch schreiben:

$$\underline{b}_{n-\lambda} = \sum_{v=0}^{\lambda} c_{n-v} \underline{y}_G((\lambda-v)T+t_0) \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

wobei man unter $\underline{y}_G(t)$ die Antwort des kontinuierlichen Systems auf die Erregung mit der Funktion

$$\underline{u}(t) = \begin{cases} \underline{G}(t) & \text{für } 0 \leq t < T \\ \underline{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

zu verstehen hat.

2.2.2.4 Berechnung der Zählerkoeffizienten aus der Sprungantwort oder der Rechteckantwort des kontinuierlichen Systems

Spezialisiert man Gl. (2.29) auf den skalaren Fall der in Abschnitt 2.2.2.2 erwähnten treppenförmigen Interpolation, so erhält man als Interpolationsfunktion

$$G(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T)$$

Die Antwort des kontinuierlichen Systems auf diese Erregung ist die Rechteckantwort $r(t)$. In diesem Fall ergeben sich die Zählerkoeffizienten gemäß Gl. (2.34) zu

$$\underline{b}_{n-\lambda} = \sum_{v=0}^{\lambda} c_{n-v} \cdot r((\lambda-v)T) \quad \lambda = 0, 1, \dots, n \quad (2.35)$$

Gl. (2.35) stellt einen wichtigen Spezialfall dar, der meßtechnisch von Bedeutung ist, wenn ein reales System mit Hilfe eines "Rechteckimpulses" ausgemessen werden soll, um bei bekanntem Nennerpolynom seine Übertragungsfunktion zu bestimmen.

Eine andere Interpretation von Gl. (2.35) erlaubt die Berechnung der Zählerkoeffizienten aus der Sprungantwort des Systems. Stellt man nämlich die Rechteckantwort des Systems dar als

$$r(t) = h_{-1}(t) - h_{-1}(t-T)$$

so ergibt sich aus Gl. (2.35)

$$b_{n-\lambda} = \sum_{v=0}^{\lambda} c_{n-v} \cdot [h_{-1}((\lambda-v)T) - h_{-1}((\lambda-v-1)T)] \quad (2.36)$$

Anmerkung 1:

In der allgemeinen Darstellung von Gl. (2.34) ist auch der Spezialfall enthalten, bei dem man die Zählerkoeffizienten aus Abtastwerten der Impulsantwort berechnen kann, wenn nämlich für $G(t)$ der Dirac-Impuls gesetzt wird. Dann wird y_G skalar und ist

$$y_G((\lambda-v)T) = h_0((\lambda-v)T)$$

Anmerkung 2:

Gl. (2.34) und die daraus resultierenden Spezialfälle lassen sich auch in Matrixschreibweise darstellen. Für einen direkten Vergleich mit [22] seien hier beispielhaft die Zählerkoeffizienten der Übertragungsfunktion derjenigen diskreten Systeme angegeben, die dieselbe Impulsantwort bzw. Sprungantwort wie das vorgelegte kontinuierliche System haben.

Bei einem System gleicher, d.h. in den Abtastpunkten gleicher Impulsantwort gilt:

$$\underline{b} = \underline{c} \cdot \underline{h}_0$$

mit

$$\underline{b} = [b_n, b_{n-1}, \dots, b_0]^T, \quad \underline{h}_0 = [h_0(0), h_0(T), \dots, h_0(nT)]^T$$

und

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_n & 0 & \dots & 0 \\ c_{n-1} & c_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}.$$

b_0 ergibt sich dabei zu 0, da

$$h_0(nT) = - \sum_{v=1}^n c_{n-v} \cdot h_0((n-v)T) \quad c_n = 1$$

(vergl. dazu auch [23]).

Bei einem System gleicher, d.h. in den Abtastpunkten gleicher Sprungantwort gilt die rekursive Beziehung:

$$\sum_{v=0}^{\lambda} b_{n-v} = \sum_{v=0}^{\lambda} c_{n-v} \cdot h_{-1}((\lambda-v)T) \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots, n; \quad c_n = 1 \quad (2.37)$$

Das läßt sich schreiben als

$$\underline{a}_u \cdot \underline{b} = \underline{c} \cdot \underline{h}_{-1}$$

wenn $\underline{b}$ und $\underline{c}$ wie oben definiert sind und

$$\underline{a}_u = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \text{C} & \\ \vdots & & & \ddots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{h}_{-1} = [h_{-1}(0), h_{-1}(T), \dots, h_{-1}(nT)]^T$$

Die Beziehung (2.37) läßt sich mit Hilfe der vollständigen Induktion aus der Beziehung (2.36) herleiten.

1. Die Beziehung gilt für $\lambda = 0$.

Gemäß Gl. (2.36) gilt nämlich:

$$b_n = c_n \cdot h_{-1}(0)$$

2. (2.37) gelte für λ :

$$\sum_{v=0}^{\lambda} b_{n-v} = \sum_{v=0}^{\lambda} c_{n-v} \cdot h_{-1}((\lambda-v)T)$$

Aus Gl. (2.36) ergibt sich für $\lambda+1$:

$$\begin{aligned} b_{n-\lambda-1} &= \sum_{v=0}^{\lambda+1} c_{n-v} (h_{-1}((\lambda+1-v)T) - h_{-1}((\lambda-v)T)) \\ &= \sum_{v=0}^{\lambda+1} c_{n-v} \cdot h_{-1}((\lambda+1-v)T) - \\ &\quad - \sum_{v=0}^{\lambda} c_{n-v} \cdot h_{-1}((\lambda-v)T) = c_{n-\lambda-1} \cdot h_{-1}(-T) \end{aligned}$$

Der dritte Term der rechten Seite verschwindet aus Kausalitätsgründen. Wegen der Annahme 2 ist dann:

$$b_{n-\lambda-1} = \sum_{v=0}^{\lambda+1} c_{n-v} \cdot h_{-1}((\lambda+1-v)T) - \sum_{v=0}^{\lambda} b_{n-v}.$$

Es folgt unmittelbar:

$$\sum_{v=0}^{\lambda+1} b_{n-v} = \sum_{v=0}^{\lambda+1} c_{n-v} \cdot h_{-1}((\lambda+1-v)T)$$

q.e.d.

2.2.3 Test des Othmer Verfahrens

2.2.3.1 Testfunktion, Fehlerkriterium, Vergleichsmodell und Beispielsysteme

Als Testeingangsfunktion für das nach Othmer transformierte Filter wurde die Sprungfunktion gewählt. Sie erschien deshalb besonders geeignet, da sie sowohl bei linearer als auch bei treppenförmiger Approximation der Bedingung

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{G}(t-t_k) \cdot \underline{u}_k \quad (\text{vgl. Abschn. 2.2})$$

genügt und daher zu exakten Ausgangssignalwerten $y_*(kT)$ führen müßte.

Fehlerkriterien:

Gemessen wurde die Abweichung der Sprungantwort zu den über

die Residuenrechnung (s.u.) gewonnenen Werten. In Diagrammen wurden folgende Abhängigkeiten aufgetragen:

- Abhängigkeit der maximalen Abweichung von der Rechenschrittweite im Vergleich zu anderen Verfahren
- Obige Abweichung in Abhängigkeit von der Rechnergenauigkeit
- Abhängigkeit dieser Abweichung von den verschiedenen programmierten Berechnungsverfahren
- Abhängigkeit vom Systemgrad

Als maximale Abweichung wurde folgender normierter Wert bezeichnet:

$$\epsilon_{\max} = \frac{\text{Max}\{ |y(k \cdot T) - y_*(k \cdot T)| \}}{\text{Max}\{ |y(k \cdot T)| \}}$$

wobei $y(k \cdot T)$ die Abtastwerte der über Residuenrechnung gewonnenen Ausgangsfunktion sind

und $y_*(k \cdot T)$ die Ausgangssignalwerte des transformierten Systems sind.

Vergleichsmodell:

Zum Vergleich der Ausgangssignalwerte wurde die Sprungantwort über die Laplace-Rücktransformation

$$h_{-1}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \cdot H(s) \right\}$$

gewonnen. Hierbei wurden sowohl die Residuen in doppelter Genauigkeit errechnet, als auch die Funktionswerte zu den diskreten Zeitpunkten

$$t_k = k \cdot T, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Da die Sprungfunktion obige Bedingung erfüllt, müssen auftretende Abweichungen auf numerische Ungenauigkeiten bei der Koeffizientenberechnung beruhen, bzw. auf numerische Fehler bei der Durchführung.

Weiter wurden beispielhaft zum Vergleich zwei bereits getestete Transformationsverfahren dem Othmer-Verfahren gegenübergestellt, die bilineare Transformation und das Verfahren nach Gorille.

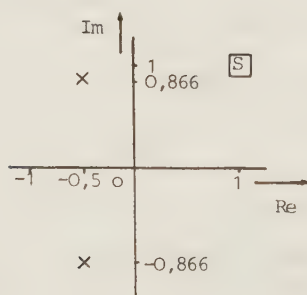
Untersuchte Systeme

Zunächst wurde ein einfaches System 2. Grades untersucht, um die prinzipielle Arbeitsweise des Verfahrens zu testen.

Die Übertragungsfunktion dieses Systems lautet

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

PN-Diagramm:



Im weiteren Verlauf wurde ein Cauer T.P. 6. Grades (Bezeichnung CO6 2545c) als Testfilter verwendet. Die Übertragungsfunktion hat die Form

Cauer-T.P.:

$$H_1(s) = K_1 \frac{(s^2 + B_{01})(s^2 + B_{02})}{(s^2 + C_{11}s + C_{01})(s^2 + C_{12}s + C_{02})(s^2 + C_{13}s + C_{03})}$$

Um auch den Einfluß eines größeren Gradunterschiedes von Zähler und Nennerpolynom untersuchen zu können, wurden außerdem die folgenden, aus dem Cauertiefpaß abgeleiteten Übertragungsfunktionen behandelt.

Systeme 6. Grades mit 2 Nullstellen:

$$H_2(s) = K_2 \frac{s^2 + B_{O1}}{(s^2 + C_{11}s + C_{O1})(s^2 + C_{12}s + C_{O2})(s^2 + C_{13}s + C_{O3})}$$

$$H_3(s) = K_3 \frac{s^2 + B_{O2}}{(s^2 + C_{11}s + C_{O1})(s^2 + C_{12}s + C_{O2})(s^2 + C_{13}s + C_{O3})}$$

System 6. Grades ohne Nullstellen:

$$H_4(s) = K_4 \frac{1}{(s^2 + C_{11}s + C_{O1})(s^2 + C_{12}s + C_{O2})(s^2 + C_{13}s + C_{O3})}$$

Die Zahlenwerte für Pole und Nullstellen sind im Anhang zu finden.

2.2.3.2 Abhängigkeit der maximalen Abweichung von der Rechenschrittweite

Wie erwähnt, liefert das Verfahren nach Othmer unabhängig von T theoretisch exakte Ausgangswerte. Die praktische Erprobung, deren Ergebnis in Bild 2.7 dargestellt ist, zeigt ein sehr starkes Anwachsen des Fehlers bei sinkendem Abtastintervall. Diese scheinbare Nicht-Konsistenz muß allein auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen sein.

Im Einzelnen wird noch in Abschn. 2.2.4 auf die Ursachen eingegangen.

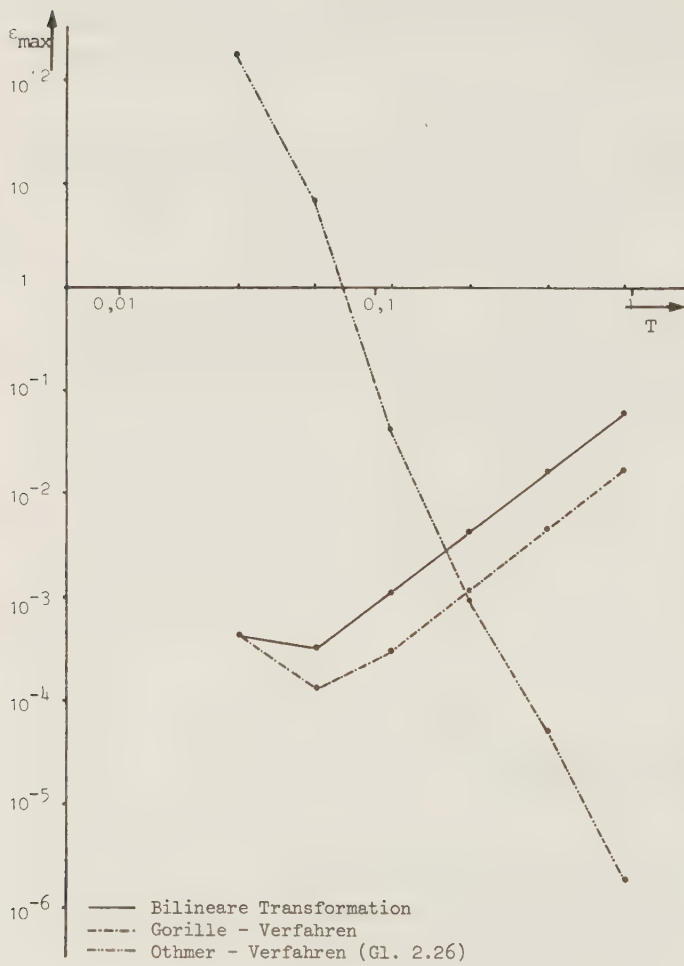


Bild 2.7: Maximaler Fehler bei Sprungantwort des Cauer-T.P.
Mantissenwortlänge 24 bit.

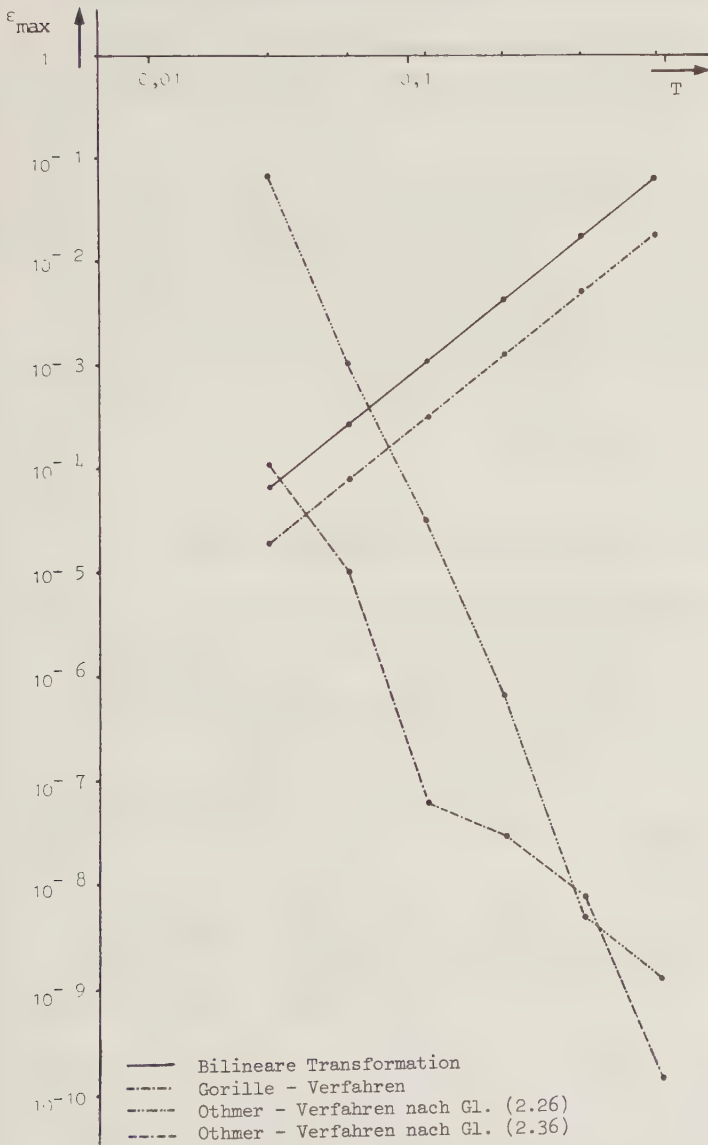


Bild 2.8: Maximaler Fehler bei Sprungantwort des Cauer-T.P.
Mantissenwortlänge 36 bit.

2.2.3.3 Abhängigkeit des Fehlers von der Rechnergenauigkeit

Die Ergebnisse von Bild 2.7 wurden auf der PDP 11 gewonnen. Die Mantisse hat bei diesem Rechner eine Wortlänge von 24 bit.

Die gleichen Berechnungen wurden auf dem Rechner CD 3300 und TR 440 wiederholt, die beide eine Mantissenlänge in einfacher Genauigkeit von 36 bit haben (Bild 2.8). Man erkennt deutlich, daß bei den bisherigen Verfahren die Abweichungen unabhängig von der Rechnergenauigkeit sind, der Fehler also im Verfahren liegt, während die Abweichung bei Othmer-Verfahren aus den numerischen Fehlern der einzelnen Berechnungsschritte resultiert.

2.2.3.4 Einfluß des Systemgrades auf die Genauigkeit

Zunächst wurde zum Test des Verfahrens nach Othmer das System 2. Grades, beschrieben in Abschn. 2.2.3.1, eingegeben. Dabei wurden, wie zu erwarten war, nahezu die gleichen Ergebnisse erzielt, wie sie das Gorille-Verfahren für Systeme 2. Grades und Sprungfunktion als Eingangsfunktion liefert (vgl. Bild 2.9). Anschließend wurde das Verfahren mit Hilfe des ebenfalls in 2.2.3.1 beschriebenen Cauer-Tiefpasses, sowie den daraus abgeleiteten Systemen 6. Grades mit 2 Nullstellen und ohne Nullstellen getestet.

Bild 2.10 zeigt die Abweichung von den exakten Werten bei Berechnung der Zählerkoeffizienten nach Abschn. 2.2.2.2. Bild 2.11 zeigt die Fehlerkurven bei Berechnung nach Abschn. 2.2.2.3.

Auch hier wird deutlich, daß die umfangreichen Beziehungen der Gl. (2.26) und (2.27) auf so große numerische Ungenauigkeiten führten, daß kein Einfluß der Zählerkoeffizienten des kontinuierlichen Systems mehr feststellbar ist (Bild 2.10).

Bei der Berechnung der Zählerkoeffizienten aus der Sprungant-

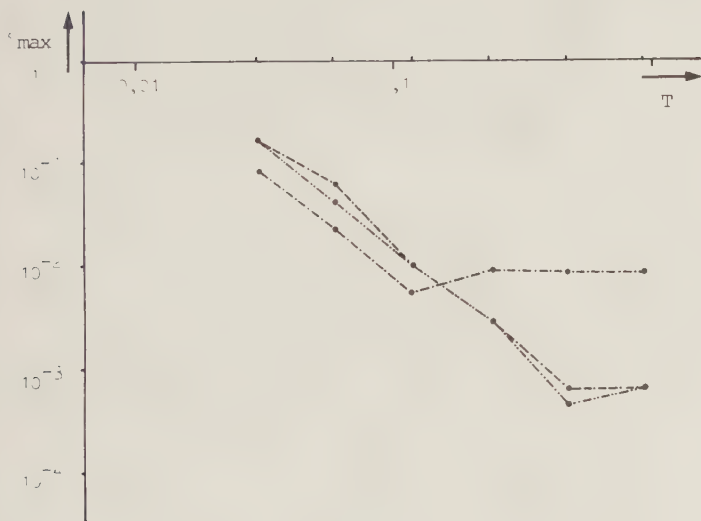


Bild 2.9: Maximaler Fehler bei Sprungantwort des Systems
2. Grades. Mantissenwortlänge 24 bit.

- Othmer - Verfahren nach Gl. (2.26)
- .- Othmer - Verfahren nach Gl. (2.36)
- ... Gorille - Verfahren



Bild 2.10: Maximaler Fehler bei Sprungantwort der Systeme $H_1(s), \dots, H_4(s)$ bei Othmer-Transformation

wort des kontinuierlichen Systems (Bild 2.11) müssen die unterschiedlichen Fehlerkurven auf dem Gradunterschied des kontinuierlichen Systems bzw. dessen Nullstellen zurückzuführen sein, da der Nenner der untersuchten Systeme identisch ist, und auch völlig identisch berechnet wird.

(Vergleiche dazu auch Abschn. 2.2.4).

2.2.3.5 Einfluß der Berechnungsart der Zählerkoeffizienten

Die bisherigen Ergebnisse zeigen, daß die Genauigkeit des Othmer-Verfahrens direkt von der numerischen Genauigkeit der berechneten Beziehungen abhängt. Je einfacher die Beziehung zur Berechnung der Zählerkoeffizienten sind, desto genauer wird das gesamte Verfahren, - da der Nenner ja stets direkt aus den Polen des kontinuierlichen Systems transformiert wird. Bild 2.12 zeigt den Unterschied der erreichbaren Genauigkeit bei den Verfahren nach Abschn. 2.2.2.2, 2.2.2.4. Eine Genauigkeitssteigerung bei der Berechnung nach 2.2.2.4 ließ sich erzielen, wenn die Berechnung der Sprungantwort und der erforderlichen Differenzen aus deren Abtastwerten mit doppelter Genauigkeit durchgeführt wurde (Bild 2.13).

Hier wird bereits die hohe Empfindlichkeit der zur anschließenden Kaskadierung notwendigen Nullstellensuche auf geringfügige Koeffizientenschwankungen deutlich (vgl. Abschn. 2.2.3.6).

Die Darstellungen von Bild 2.14 zeigen den tatsächlichen Fehlerverlauf, aufgetragen über $k \cdot T$. Es ergibt sich eine bleibende Abweichung auch für große k . Darauf basiert auch die Fehlerbetrachtung von Abschn. 2.2.4 .

Zunächst soll jedoch durch Messungen der Einfluß der Zählerkoeffizienten auf die Genauigkeit der Ausgangsfunktion deutlich gemacht werden.

Wie im Abschn. 2.2.2.4 gezeigt, lassen sich die Integralglei-

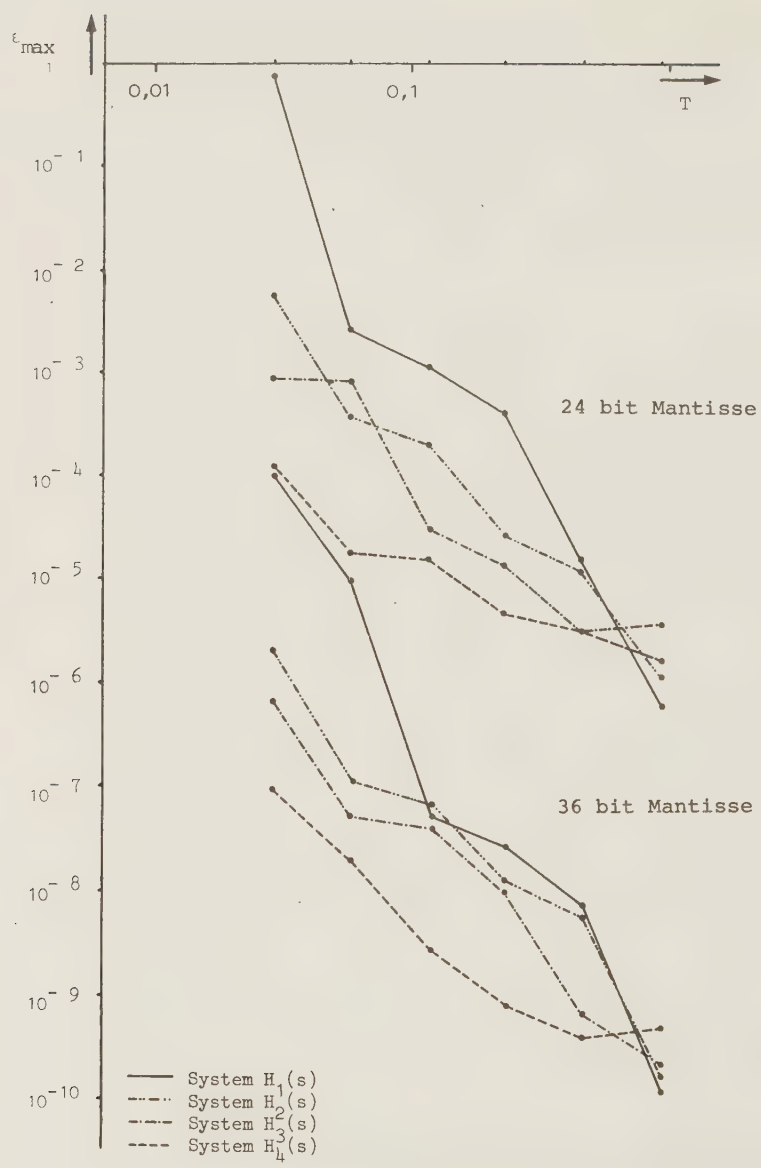


Bild 2.11: Maximaler Fehler bei Sprungantwort des Cauer-T.P. bei Othmer-Transformation nach Gl. (2.36)

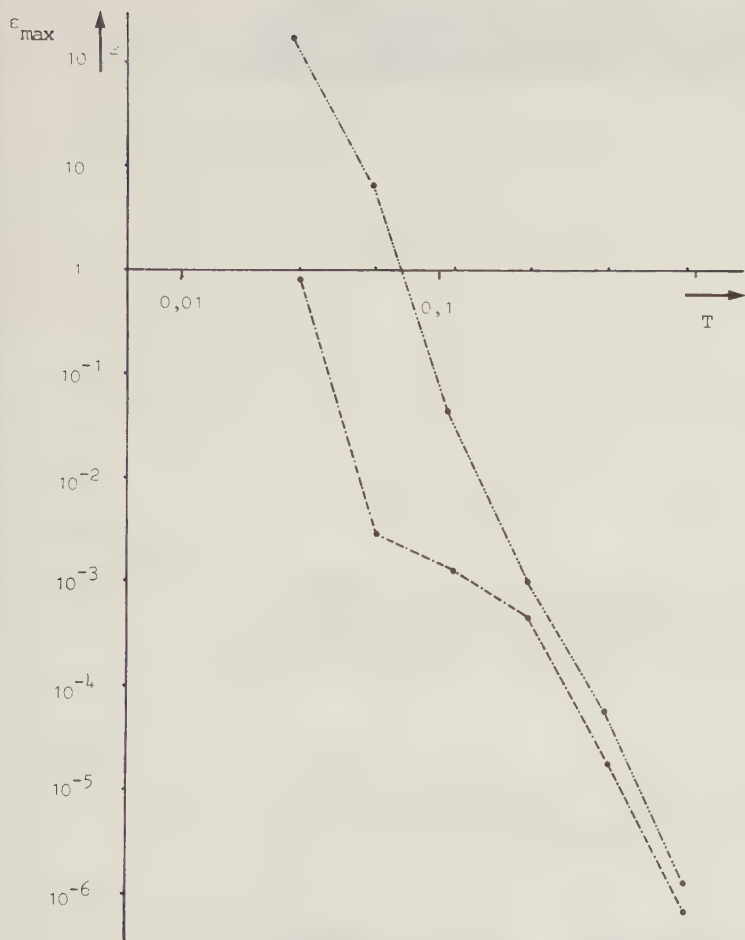


Bild 2.12: Vergleich des maximalen Fehlers bei Sprungantwort des Cauer-T.P. für zwei verschiedene Berechnungsmöglichkeiten des Othmer-Verfahrens. Mantissenwortlänge 24 bit.

--- nach Gl. (2.26)
 -.- nach Gl. (2.36)

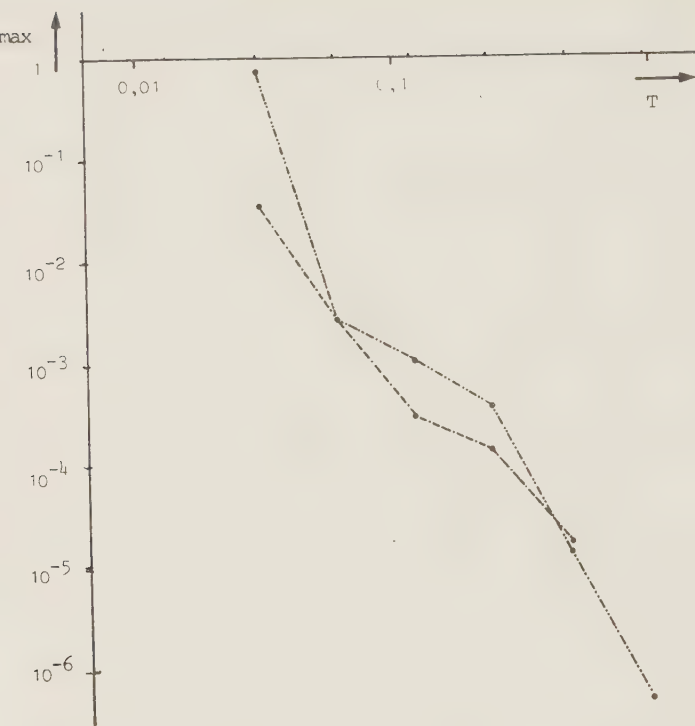


Bild 2.13: Vergleich des maximalen Fehlers bei Sprungantwort des Cauer-T.P. für Berechnung des Othmer-Verfahrens mit unterschiedlicher Rechengenauigkeit.

----- Berechnung einfach genau
 -.-.-.- Berechnung doppelt genau

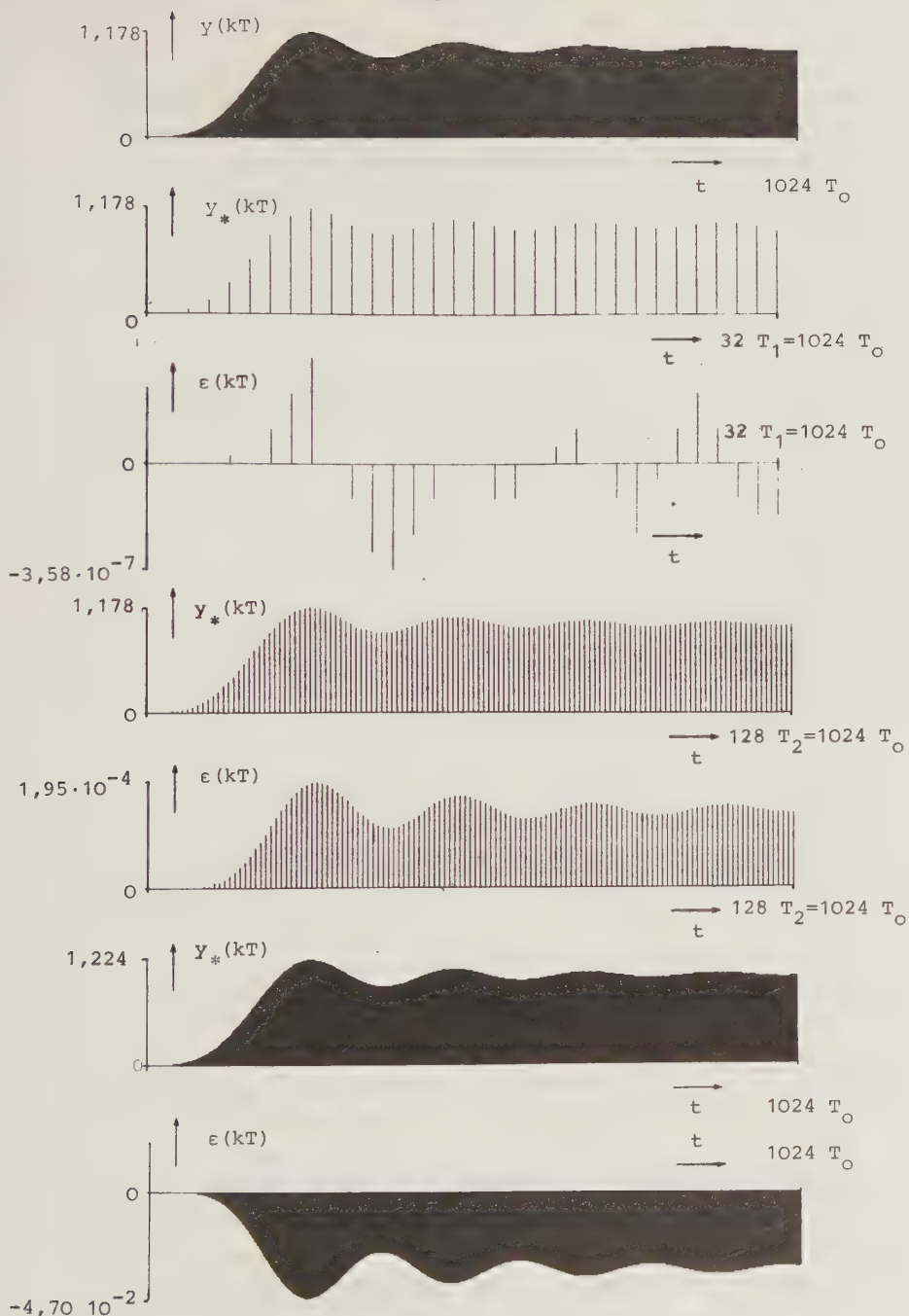


Bild 2.14: Zeitlicher Verlauf von Ausgangsfunktion und Fehler beim Othmer-Verfahren für versch. Rechenschrittweiten. (Cauer-T.P.) $T_O = 0,0293 \text{ sec}$

chungen zur Berechnung der Zählerkoeffizienten in einfache Beziehungen umformen. Würden keine numerischen Ungenauigkeiten auftreten, so müßten sich nach beiden Berechnungsarten - über Gl. (2.26) und aus der Sprungantwort - die gleichen Werte für die Koeffizienten ergeben.

Welche Werte sich jedoch tatsächlich ergaben, sei an folgendem Beispiel gezeigt.

Transformiertes System: System mit Übertragungsfunktion $H_4(s)$ (keine Nullstellen im Endlichen), Rechner PDP 11 (24 bit Mantisse); Abtastintervall T_1 und T_2 .

$T_1 = 0,9375$	b_5	b_4	b_3
Berechnung über Integral	$0,1693623 \cdot 10^{-3}$	$0,7317379 \cdot 10^{-2}$	$0,3013802 \cdot 10^{-1}$
Berechnung über Sprungantwort	$0,1692561 \cdot 10^{-3}$	$0,7317682 \cdot 10^{-2}$	$0,3013751 \cdot 10^{-1}$
$T_1 = 0,9375$	b_2	b_1	b_0
Berechnung über Integral	$0,2442381 \cdot 10^{-1}$	$0,3885102 \cdot 10^{-2}$	$0,582780 \cdot 10^{-4}$
Berechnung über Sprungantwort	$0,2442422 \cdot 10^{-1}$	$0,3884717 \cdot 10^{-2}$	$0,5850352 \cdot 10^{-4}$
$T_2 = 0,234$	b_5	b_4	b_3
Berechnung über Integral	$0,2105651 \cdot 10^{-6}$	$0,1915035 \cdot 10^{-5}$	$0,1484645 \cdot 10^{-4}$
Berechnung über Sprungantwort	$0,4967570 \cdot 10^{-7}$	$0,2674645 \cdot 10^{-4}$	$0,1340487 \cdot 10^{-4}$
$T_2 = 0,234$	b_2	b_1	b_0
Berechnung über Integral	$0,1133309 \cdot 10^{-4}$	$0,2959449 \cdot 10^{-5}$	$0,1092031 \cdot 10^{-6}$
Berechnung über Sprungantwort	$0,1271219 \cdot 10^{-4}$	$0,2280953 \cdot 10^{-5}$	$0,3798875 \cdot 10^{-7}$

Zur endgültigen Berechnung der Ausgangssignalwerte wird, wie erwähnt das Gesamtsystem in Blöcke zweiten Grades aufgespalten.

Damit werden zur Berechnung der tatsächlich verwendeten Zählerkoeffizienten eines Teilsystems

$$H_{k*}(z) = \frac{b_{2k} z^2 + b_{1k} z + b_{0k}}{z^2 + c_{1k} z + c_{0k}} \quad (\text{vgl. Gl. (2.3)})$$

folgende Berechnungsschritte durchlaufen:

- i Berechnung der Koeffizienten des Nennerpolynoms durch Ausmultiplizieren der Pole nach der Vorschrift

$$z^n + \sum_{v=0}^{n-1} c_v z^v = \prod_{v=1}^n (z - e^{s_{\infty v} T})$$

- ii Berechnung der Koeffizienten des Zählerpolynoms nach der Vorschrift

$$b_{n-\lambda} = \sum_{v=0}^{\lambda} c_{n-\lambda} \cdot (h_{-1}((\lambda-v)T) - h_{-1}((\lambda-v-1)T))$$

oder nach den Gl. (2.26) oder (2.27).

- iii Berechnung der Nullstellen des Polynoms

$$\sum_{\lambda=0}^n b_{n-\lambda} z^{n-\lambda} = 0$$

- iv Ausmultiplizieren von je zwei Nullstellen zur Bestimmung der b_{1k} und b_{0k} .

Der in obiger Tabelle aufgeführte Unterschied der beiden Berechnungsarten von Punkt ii) wirkt sich auf die Nullstellensuche von Punkt iii) bereits so stark aus, daß sich für die Nullstellen des über Integralberechnung gewonnenen Polynoms konjugiert komplexe Paare ergeben. Die Berechnung über die Integralbezeichnung bei höherer Rechnerwortlänge (CD 3300) liefert dagegen bei gleicher Abtastbreite

T_2 noch ein Polynom mit den unten angegebenen reellen Nullstellen.

Nullstellen bei Berechnung der Zählerkoeffizienten für T_2 :

über Integralbezeichnung aus Werten der Sprungantwort
Nullstellen: Nullstellen:

$\sigma_{0\mu}$	$\omega_{0\mu}$	$\sigma_{0\mu}$	$\omega_{0\mu}$
-0,4138066E 01	-0,6810784E 01	-0,4837256E 02	0,0000000E 00
-0,4138066E 01	0,6810784E 01	-0,4293170E 01	0,0000000E 00
-0,4256261E 00	-0,2626668E 00	-0,2095401E 00	0,0000000E 00
-0,4256261E 00	0,2626668E 00	-0,9483269E 00	0,0000000E 00
0,3264381E-01	0,0000000E 00	-0,1853142E-01	0,0000000E 00

2.2.3.6 Einfluß der Nullstellensuche

Als nächstes soll der Einfluß der Nullstellensuche gezeigt werden. Dazu sei nur noch die Berechnung der $b_{n-\lambda}$ aus den Sprungantwortwerten betrachtet. Die Berechnungsvorschriften für die drei in Abschn. 3.2.3.1 beschriebenen Systeme 6. Grades sind völlig identisch. Der einzige Unterschied tritt nur in den Werten der Sprungantwort auf. Da diese doppelt genau über Residuenrechnung bestimmt werden, müßte sich der Fehler, der gemessen wird, für alle drei Systeme entsprechen. Tatsächlich treten aber Abweichungen auf. Neben den in 2.2.4 beschriebenen Ursachen sind sie auch auf die Nullstellensuche zurückzuführen. Als Zahlenbeispiel seien folgende Werte herausgegriffen:

1.) Grenzwert $h_{-1}(\infty)$ vor der Nullstellensuche

$$h_{-1v}(\infty) = \left(\sum_{v=0}^n b_{n-\lambda} \right) \cdot \frac{1}{\sum_{v=0}^n c_v}$$

2.) Grenzwert $h_{-1}^{(\infty)}$ nach der Nullstellensuche

$$h_{-1n}^{(\infty)} = \prod_{v=1}^{n/2} (1+b_{1v}+b_{0v}) \cdot \frac{1}{\sum_{v=0}^n c_v}$$

Durch entsprechende Normierung müßte sich als wahrer Wert stets 1 ergeben. Berechnet wurde: (Mantissengenauigkeit 10^{-6} der PDP 11)

	$T_1=0,937$		$T_2=0,029$	
	$h_{-1v}^{(\infty)}$	$h_{-1n}^{(\infty)}$	$h_{-1v}^{(\infty)}$	$h_{-1n}^{(\infty)}$
System ohne Nullstellen	0,9999976	0,9999974	0,9998366	0,9998366
Cauer T.P.	0,9999825	0,9999825	1,033414	1,034833

Während sich beim System ohne Nullstellen aus der Nullstellensuche kein ablesbarer zusätzlicher Fehler ergibt, tritt bei Cauer T.P. für $T = 0,029$ eine zusätzliche Abweichung von 10^{-3} auf. Man vergleiche dazu den gemessenen Fehlerverlauf von Bild 2.11.

Ein anderer Vergleich zur Genauigkeitsuntersuchung für die Nullstellensuche läßt sich bei Berechnung mit unterschiedlicher Maschinengenauigkeit anstellen. Koeffizientenberechnung und anschließende Nullstellensuche wurde einmal auf der CD 3300, einmal auf der PDP 11 durchgeführt.

In untenstehender Tabelle sind wieder für 2 verschiedene Rechenschrittweiten Nullstellen und zugehörige Koeffizienten aufgeführt. Das transformierte System ist der Cauer T.P.

1. Abtastintervall $T_1 = 0,9375$

Koeffizienten	b_5	b_4	b_3
	$0,89919 \cdot 10^{-2}$	$0,83025 \cdot 10^{-2}$	$0,19750 \cdot 10^{-1}$

Koeffizienten	b_2	b_1	b_0
	$0,11781 \cdot 10^{-1}$	$0,12276 \cdot 10^{-1}$	$0,48899 \cdot 10^{-2}$

identisch für PDP 11 und CD 3300 (5 Stellen der Mantisse)

Nullstellen $-0,46000 \pm j \ 0$
 $-0,36855 \pm j \ 0,10315 \cdot 10^{+1}$
 $+0,13689 \pm j \ 0,98317$

identisch für PDP 11 und CD 3300 (5 Stellen der Mantisse).

2. Abtastintervall $T_2 = 0,0293$

Koeffizienten	b_5	b_4	b_3
	$0,99929 \cdot 10^{-5}$	$-0,30077 \cdot 10^{-4}$	$0,20544 \cdot 10^{-4}$

Koeffizienten	b_2	b_1	b_0
	$0,19011 \cdot 10^{-4}$	$-0,29310 \cdot 10^{-4}$	$0,98394 \cdot 10^{-5}$

Nullstellen $-0,98463 \pm j \ 0$
PDP 11 $0,99840 \pm j \ 0,57946 \cdot 10^{-1}$
 $0,99883 \pm j \ 0,46746 \cdot 10^{-1}$

Nullstellen $-0,98471 \pm j \ 0$
CD 3300 $0,99823 \pm j \ 0,59515 \cdot 10^{-1}$
 $0,99900 \pm j \ 0,44739 \cdot 10^{-1}$

Auch in diesem Vergleich wird deutlich, wie stark sich die Nullstellensuche auf die Genauigkeit der letztlich zur Berechnung herangezogenen b_{1k} und b_{0k} von Gl. (2.3) auswirkt.

2.2.3.7 Darstellung der Pole und Nullstellen der diskreten Übertragungsfunktion für das begleitende Beispiel

Für die drei Systeme 6. Grades, die in Abschn. 2.2.3.1 vorgestellt wurden, sind in nachfolgenden Diagrammen die Pole und Nullstellen der transformierten Systeme in der z-Ebene abhängig von der Rechenschrittweite T aufgetragen.

Das Nennerpolynom ist für alle drei Systeme gleich. Deshalb werden die Pole nur einmal in untenstehender Tabelle angegeben. Da die Pole für die betrachteten Abtastbreiten für kleiner werdendes T sehr stark gegen den Punkt $+1 \pm j0$ konvergieren, konnten sie graphisch nicht mehr dargestellt werden.

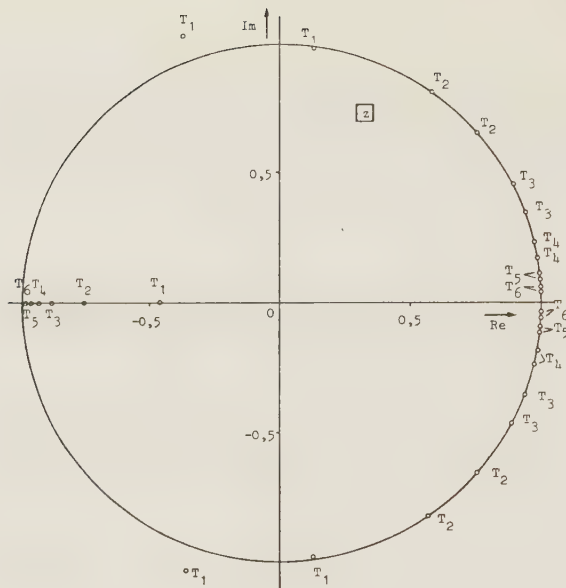
Transformationsbedingung:

$$z_{\infty v} = e^{s_{\infty v} T}$$

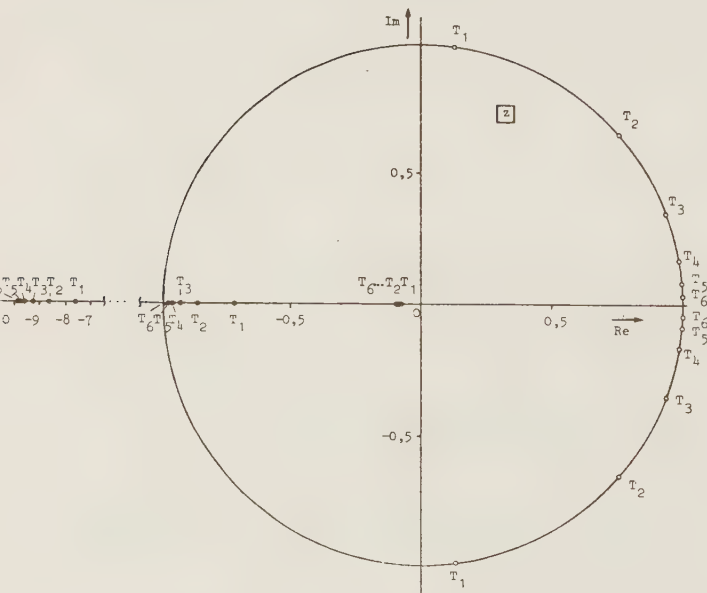
Die Nullstellen des Zählerpolynoms wurden mit Hilfe des im Programm eingebauten Nullstellensuchprogramms an der TR 440 bestimmt und in Bild 2.15 aufgetragen.

Für jedes der drei Systeme ergaben sich dabei pro Abtastintervall T_v ($v = 1, \dots, 6$) fünf Nullstellen.

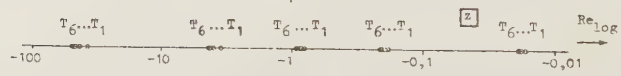
Bemerkenswert ist, daß mit abnehmendem Grad des Zählerpolynoms von $H(s)$ mehr Nullstellen des $H_*(z)$ reell werden.



a)



b)



c)

Bild 2.15: Lage der Nullstellen in der z -Ebene für die Systeme $H_*(z)$, transformiert aus:

- a) $H_1(s)$
- b) $H_2(s)$
- c) $H_4(s)$

Pole im s-Bereich	-0,070857 j 1,021937	-0,248647 j 0,800054	-0,473263 j 0,292312
T ₁	0,935599±j 0,015646	0,792001±j 0,010369	0,641661±j 0,003069
T ₂	0,967298±j 0,008087	0,889964±j 0,005825	0,801040±j 0,001916
T ₃	0,983521±j 0,004111	0,943384±j 0,003087	0,895009±j 0,001070
T ₄	0,991729±j 0,002073	0,971281±j 0,001589	0,946049±j 0,000565
T ₅	0,995856±j 0,001041	0,985536±j 0,000806	0,972651±j 0,000291
T ₆	0,997926±j 0,000521	0,992742±j 0,000406	0,986231±j 0,000147

Pole im z-Bereich für

$$T_1 = 0,93750 ; T_2 = 0,46875 ; T_3 = 0,23438 ; T_4 = 0,11719 ; T_5 = 0,05859$$

$$T_6 = 0,02930$$

2.2.4 Theoretische Betrachtung des Fehlerverlaufs

Aus den Meßergebnissen von Abschn. 2.2.3 ergab sich ein Fehler bei der Ausgangsfunktion, der theoretisch nicht auftreten dürfte, da alle Voraussetzungen für das Othmer Transformationsverfahren erfüllt waren.

Weiter ergab sich, daß der Fehler stark von der Genauigkeit der Berechnung der Zählerkoeffizienten abhing. In diesem Abschnitt soll daher eine theoretische Deutung dieses Fehlers versucht werden. Ausgangspunkt sind die folgenden Berechnungsvorschriften:

- i Die Berechnung der Nennerpolynomkoeffizienten c_v , die für die Zählerberechnung benötigt werden, geschieht durch ein Polynommultiplikationsprogramm, das schrittweise das Polynom nach folgender Beziehung aufbaut:

$$\left(\sum_{v=0}^{\lambda} \tilde{c}_v z^v \right) = \left(\sum_{v=0}^{\lambda-2} \tilde{c}_v z^v \right) \cdot (z^2 - (e^{s_{\lambda}^T} + e^{s_{\lambda-1}^T})z + e^{(s_{\lambda} + s_{\lambda-1})^T})$$

s_{λ} : λ -ter Pol von $H(s)$; $\lambda = 2, 4, \dots, n$

- bei kongugiert komplexen Polen gilt: $s_{\lambda} = s_{\lambda-1}^*$
- bei ungeradem n wird die letzte Multiplikation mit einem Polynom ersten Grades durchgeführt.

- ii Die Berechnung der Nennerkoeffizienten für die Teilsysteme der Kaskade selbst erfolgt direkt nach der Vorschrift

$$c_{2k} = 1 ; \quad c_{1k} = -2 \cdot e^{\operatorname{Re}\{s_{\infty v}\}T} \cdot \cos(\operatorname{Im}\{s_{\infty v}\}T) ; \quad c_{0k} = e^{2(\operatorname{Re}\{s_{\infty v}\}T)}$$

bzw. für Paare von reellen Polen

$$c_{2k} = 1 ; \quad c_{1k} = -(e^{s_{\infty v}^T} + e^{s_{\infty(v+1)}^T}) ; \quad c_{0k} = e^{(s_{\infty v} + s_{\infty(v+1)})T}$$

- iii Die Werte der Sprungantwort $h_{-1}(kT)$, die zur Berechnung der Zählerkoeffizienten ebenfalls benötigt werden, errechnen sich genau wie die als Vergleichswerte herange-

zogenen Ausgangssignalwerte mit doppelter Genauigkeit.

Aus diesen Berechnungsvorschriften werden folgende, die Fehlerbetrachtung vereinfachenden Annahmen getroffen:

- a) Die Berechnung des Nenners der Teilsysteme der Kaskade sei exakt. Damit wird auch der Nenner der gesamten Übertragungsfunktion in Produktdarstellung exakt angenommen.
- b) Die zur Berechnung der Zählerkoeffizienten benötigten Abtastwerte der Sprungantwort seien exakt, da sie mit doppelter Genauigkeit ermittelt wurden.
- c) Der Fehler bei der Zählerkoeffizientenberechnung tritt im wesentlichen bei der Polynommultiplikation und der Nullstellensuche auf.
- d) Für Punkt 2.2.4.2 möge der Fehler allein von der Ungenauigkeit der Polynommultiplikation herrühren.

2.2.4.1 Prinzipieller Verlauf des Fehlers über der Zeit

Betrachtet sei die Übertragungsfunktion $H_*(z)$ in direkter Struktur nach Bild 2.4.

Dann gilt für den k-ten Abtastwert der Ausgangsfunktion:

$$y_k = \sum_{\lambda=0}^n b_{n-\lambda} u_{k-\lambda} - \sum_{\lambda=1}^n c_{n-\lambda} y_{k-\lambda} \quad k \geq n \quad (2.38a)$$

Der im Rechner gewonnene Wert sei

$$\tilde{y}_k = \sum_{\lambda=0}^n \tilde{b}_{n-\lambda} u_{k-\lambda} - \sum_{\lambda=1}^n c_{n-\lambda} \tilde{y}_{k-\lambda} \quad (2.38b)$$

Aus diesen Differenzengleichungen lassen sich diskrete Übertragungsfunktionen formulieren:

$$H_*(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^n b_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v z^v} \quad \text{exakte Übertragungsfunktion} \quad (2.39a)$$

$$\tilde{H}_*(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^n \tilde{b}_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v z^v} \quad \text{berechnete Übertragungsfunktion} \quad (2.39b)$$

Aus den Gleichungen (2.38a) und (2.38b) lassen sich folgende Abweichungen definieren:

$$\Delta y_k = y_k - \tilde{y}_k \quad k \geq n$$

und $\Delta b_{n-\lambda} = b_{n-\lambda} - \tilde{b}_{n-\lambda}$

wobei die mit $\sim$ gezeichneten Werte wie in Gl. (2.38b) definiert sind. Damit läßt sich folgende Differenzengleichung aufstellen:

$$\Delta y_k = \sum_{\lambda=0}^n \Delta b_{n-\lambda} u_{k-\lambda} - \sum_{\lambda=1}^n c_{n-\lambda} \Delta y_{k-\lambda} \quad (2.40)$$

Daraus läßt sich wieder eine diskrete Übertragungsfunktion ableiten:

$$\Delta H_*(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^n \Delta b_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v z^v} \quad (2.41)$$

In dem durch Gl. (2.41) beschriebenen System sind dieselben Eigenschwingungen enthalten wie im ursprünglichen. Das bedeutet aber, daß $h_{-1}(t)$ und $\Delta h_{-1}(t)$ miteinander verwandt sein müssen.

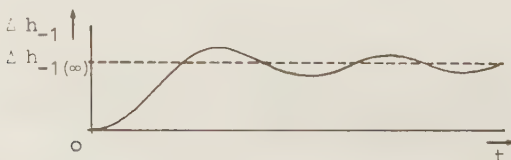


Bild 2.16: Zu erwartender Fehlerverlauf bei Sprungerregung

Vergleicht man Bild 2.16 mit dem gemessenen Fehlerverlauf von Abb. 2.14b und 2.14c, so sieht man obige Vermutung bestätigt. Der Endwert $\Delta h_{-1}(\infty)$, auf den die Fehlerkurve einschwingt, stellt als bleibende Abweichung ein Gütemaß des Verfahrens dar und soll im nächsten Abschnitt näher betrachtet werden.

2.2.4.2 Untersuchung der Abhängigkeit der bleibenden Abweichung von T und den Systemparametern

Zur Vereinfachung sei angenommen, daß die Filterung in direkter Struktur durchgeführt wurde. Die Ausgangssignalwerte der Sprungantwort errechnen sich mit Gl. (2.37) demnach zu:

$$\begin{aligned} h_{-1}(kT) &= \sum_{\lambda=0}^n b_{n-\lambda} - \sum_{\lambda=1}^n c_{n-\lambda} h_{-1}((k-\lambda)T) \\ &= \sum_{\lambda=0}^n c_{n-\lambda} h_{-1}((n-\lambda)T) - \sum_{\lambda=1}^n c_{n-\lambda} h_{-1}((k-\lambda)T) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ebenso mit Gl. (2.37) ergibt sich für den Grenzwert von $h_{-1}(kT)$ für $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{-1}(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} H_*(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^n b_{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n c_{\nu}} = \frac{\sum_{\mu=0}^n c_{n-\mu} h_{-1}((n-\mu)T)}{\sum_{\nu=0}^n c_{n-\nu}} \quad (2.43)$$

Vereinfachend werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{-1}(kT) = h_{-1}(\infty)$$

$$h_{-1}((n-\mu)T) = h_{n-\mu}$$

Damit ist (2.43):

$$h_{-1}(\infty) = \frac{\sum_{\mu=0}^n c_{n-\mu} h_{n-\mu}}{\sum_{\nu=0}^n c_{n-\nu}} = \frac{\sum_{\mu=0}^n c_{n-\mu} h_{n-\mu}}{\prod_{\nu=1}^n (1 - e^{s_{\infty \nu} T})}$$

Eine bleibende Abweichung läßt sich unter den Annahmen von Abschn. 2.2.4 definieren zu

$$\Delta h_{-1}(\infty) = \frac{\sum_{v=0}^n c_{n-v} h_{n-v} - \sum_{v=0}^n \tilde{c}_{n-v} h_{n-v}}{\prod_{v=1}^n (1 - e^{s_{\infty v} T})} .$$

Gemäß 2.2.4 gehen die $\tilde{c}_{n-v}$ aus einer Polynommultiplikation hervor, während die h_{n-v} als exakt angenommen werden. Für den Betrag der bleibenden Abweichung ergibt sich dann:

$$|\Delta h_{-1}(\infty)| = \frac{\left| \sum_{v=0}^n c_{n-v} h_{n-v} - \sum_{v=0}^n \tilde{c}_{n-v} h_{n-v} \right|}{\left| \prod_{v=1}^n (1 - e^{s_{\infty v} T}) \right|} = \frac{\left| \sum_{v=0}^n \Delta c_{n-v} h_{n-v} \right|}{\left| \prod_{v=1}^n (1 - e^{s_{\infty v} T}) \right|} \quad (2.44)$$

1. Abhängigkeit von den Systemeigenschaften

Betrachtet man Gl. (2.44), so erkennt man, daß die Systemeigenschaften im Nenner durch die Pole und im Zähler über die Abtastwerte der Sprungantwort eingehen.

Die Δc_{n-v} resultieren aus numerischen Ungenauigkeiten und sind systemunabhängig.

Darstellung der Sprungantwort aus den Systemparametern. Es gilt:

$$h_{-1}(t) = R_0 + \sum_{v=1}^n R_v e^{s_{\infty v} t} \quad (2.45)$$

wenn

$$\frac{1}{s} \cdot H(s) = \sum_{v=0}^n \frac{R_v}{s - s_{\infty v}} \quad \text{mit } s_{\infty 0} = 0 .$$

Sei

$$H(s) = \frac{\sum_{\mu=0}^m B_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{v=0}^n C_v s^v} \quad \text{mit } n-m = k \geq 0$$

Nach den Grenzwertsätzen gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k}{dt^k} h_{-1}(t) = 0 \quad \text{für } k = O(1)k-1$$

daraus ergibt sich für eine Potenzreihenentwicklung der Sprungantwort:

$$h_{-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k \quad \text{für } t \geq 0 \quad (2.46)$$

Entwickelt man die Exponentialfunktionen von G. (2.45) ebenfalls in Potenzreihen und vergleicht mit (2.46), so erhält man für die Sprungantwort eine Darstellung, in die außer dem Systemgrad, den Residuen und Polen auch der Gradunterschied eingeht.

Es ist:

$$h_{-1}(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\left(\sum_{v=1}^n R_v s_{\infty v}^k \right) t^k + R_0 \right) & \text{für } k=0 \\ \sum_{k=k}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{v=1}^n R_v s_{\infty v}^k \right) t^k & \text{für } k>0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Für diskrete Zeitpunkte λT ist dann für $k>0$

$$\begin{aligned} h_{-1}(\lambda T) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (\lambda T)^k \cdot \sum_{v=1}^n R_v s_{\infty v}^k \\ &= (\lambda T)^k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k}{(k+k)!} \cdot \sum_{v=1}^n R_v s_{\infty v}^{k+k} \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Beziehung (2.44) ergibt:

$$|\Delta h_{-1}(\infty)| = \frac{\left| \sum_{\lambda=0}^n \Delta c_{n-\lambda} \cdot (n-\lambda)^k T^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-\lambda)^k T^k}{(k+k)!} \cdot \sum_{v=1}^n R_v s_{\infty v}^{k+k} \right|}{\prod_{v=1}^n |1 - e^{s_{\infty v} T}|} \quad (2.48)$$

(2.48) verdeutlicht nochmals, daß die bleibende Abweichung $\Delta h_{-1}(\infty)$ nicht allein von der Genauigkeit der Berechnung abhängt, sondern, daß bei fehlerhaften $c_{n-\lambda}$ auch alle Systemparameter mit eingehen.

2. Abhängigkeit von der Rechenschrittweite

Ebenso wie für $h_{-1}(\lambda T)$ läßt sich für den Nenner in Gl. (2.48) eine Reihenentwicklung durchführen. Es ist

$$\begin{aligned} |1 - e^{s_{\infty v} T}| &= \left| 1 - \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{s_{\infty v}^{\kappa} T^{\kappa}}{\kappa!} \right| = \left| - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{s_{\infty v}^{\kappa} T^{\kappa}}{\kappa!} \right| \\ |1 - e^{s_{\infty v} T}| &= \left| s_{\infty v} T \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{s_{\infty v}^{\kappa} T^{\kappa}}{\kappa+1!} \right| \end{aligned} \quad (2.49)$$

Für sehr kleine Werte von T läßt sich Gl. (2.48) mit (2.49) näherungsweise so darstellen:

$$|\Delta h_{-1}(\infty)| \approx \frac{\left| \sum_{\lambda=0}^n c_{n-\lambda} \frac{(n-\lambda)^k}{k!} T^k \sum_{v=1}^n R_v s_{\infty v}^k \right|}{\left| \prod_{v=1}^n T \cdot s_{\infty v} \right|} = \left| \sum_{\lambda=0}^n \frac{\Delta c_{n-\lambda} \frac{(n-\lambda)^k}{k!}}{\prod_{v=1}^n s_{\infty v}} \sum_{v=1}^n R_v s_{\infty v}^k \right| \cdot \frac{T^k}{T^n}$$

mit

$$\frac{T^k}{T^n} = T^{n-m-n} = T^{-m} \quad \text{und} \quad \left| \sum_{\lambda=0}^n \frac{\Delta c_{n-\lambda} \frac{(n-\lambda)^k}{k!}}{\prod_{v=1}^n s_{\infty v}} \cdot \sum_{v=1}^n R_v s_{\infty v}^k \right| = \Delta_n$$

$$|\Delta h_{-1}(\infty)| \approx \Delta_n \cdot \frac{1}{T^m} \quad (2.50)$$

Die Näherungsbeziehung (2.50), gültig für kleine Rechenschrittweiten T , zeigt die Abhängigkeit der bleibenden Abweichung vom Zählergrad des kontinuierlichen Systems. Vergleicht man die Beziehung (2.50) mit den Maximalfehlerverläufen von Bild 2.11, so läßt sich die zunehmende Steigung in der doppelt logarithmischen Darstellung mit wachsendem Zählergrad dadurch erklären.

Anmerkungen:

- i Voraussetzung aller hier gemachten Fehlerbetrachtungen war die endliche Rechnerwortlänge zur Berechnung der $c_{n-\lambda}$. Da diese Koeffizienten in den obigen Beziehungen

als Summe mit alternierenden Vorzeichen auftreten, könnten sich die Fehler ohne weiteres auch einmal gegenseitig auslöschen, da die Einzelfehler i.a. statistisch auftreten.

- ii Die Beziehung (2.50) muß bei Zählergrad 0 entsprechend modifiziert werden, indem man höhere Glieder der Reihenentwicklung mit berücksichtigt.
- iii (2.50) gilt in entsprechender Weise auch für $k=0$, wenn man gemäß Gl. (2.47) R_0 mit in die Abkürzung Δ_n aufnimmt.

2.3 Simulation mit Hilfe der Parallelstruktur

In vielen Fällen liegt die Übertragungsfunktion $H(s)$ eines kontinuierlichen Systems als Partialbruchentwicklung vor, oder kann mit Hilfe der Residuenrechnung leicht in diese überführt werden. Dafür wäre es wünschenswert, eine geeignete diskrete Übertragungsfunktion $H_*(z)$ zu finden, die ohne Vorabinformation über die Eingangsfunktion - im Gegensatz zur Residuenrechnung bzw. der in 2.11 vorgestellten Transformation - möglichst genaue Ausgangssignalwerte liefert. Bei Beschränkung auf den Fall einfacher Pole läßt sich damit folgende Aufgabenstellung formulieren:

Gegeben:

$$H(s) = B_n + \sum_{v=1}^n \frac{R_v}{s - s_{\infty v}} = B_n + \sum_{v=1}^n H_v(s)$$

mit

$$H_v(s) = \frac{R_v}{s - s_{\infty v}}$$

Gesucht:

$$H_*(z) = B_n + \sum_{v=1}^n H_{*v}(z)$$

wobei $H_{*v}(z)$ so aus $H_v(s)$ zu transformieren ist, daß die Ausgangssignalwerte des diskreten Systems mit den Abtastwerten der kontinuierlichen Ausgangsfunktion möglichst genau überein-

stimmen.

2.3.1 Transformationsmöglichkeiten der Teilsysteme

Vorteile der Parallelstruktur gegenüber der Residuenrechnung wirken sich nur für eine möglichst gute Transformation der Teilsysteme aus; d.h. Verfahren, die für die Kaskadenstruktur verwendet werden und die Teilsysteme nur näherungsweise transformieren, scheiden von vornherein aus. Dagegen liefert das Othmer-Verfahren exakte Ausgangssignalwerte, wenn $u(t)$ von der in Gl. (2.9) beschriebenen Form ist. - Für den Fall linearer Interpolation ist es mit dem Gorille-Verfahren identisch.

Nach den Gleichungen von Abschnitt 2.2.2 erhält man folgende Beziehungen:

$$\text{Es sei} \quad H_v(s) = \frac{R_v}{s-s_{\infty v}} ; \quad H_{v*}(z) = \frac{b_{1v}z+b_{0v}}{c_{1v}z+c_{0v}}$$

$$\text{und} \quad G(s) = \int_0^T G(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

wenn $G(t)$ die in Gl. (2.9) definierte Funktion ist.

Dann wird

$$\begin{aligned} b_{1v} &= 0 \\ b_{0v} &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{R_v \cdot G(s) \cdot e^{sT}}{s-s_{\infty v}} ds = R_v \cdot G(s_{\infty v}) \cdot e^{s_{\infty v}T} \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} c_{1v} &= 1 \\ c_{0v} &= -z_{\infty v} = -e^{s_{\infty v}T} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems zu:

$$H_*(z) = B_n + \sum_{v=1}^n R_v \cdot G(s_{\infty v}) e^{s_{\infty v}T} \cdot \frac{1}{z-z_{\infty v}} \quad (2.53)$$

Realisiert wurde

$$G(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT}\right) \quad \text{für treppen-} \quad (2.54)$$

förmige Interpolation

und

$$G(s) = \mathcal{L}\{\underline{G}(t)\} = \mathcal{L}\left\{1 - \frac{t}{T}, \frac{t}{T}\right\} \quad (\text{entspricht Gorille-Transformation})$$

Zur eigentlichen Berechnung der Ausgangsfunktion wurden die transformierten Systeme ersten Grades wieder zu Blöcken zweiten Grades mit reellen Koeffizienten zusammengefaßt. Dabei ergaben sich folgende Transformationsbeziehungen:

i treppenförmige Approximation:

Es sei

$$H_{v*}(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + c_1 z + c_0} \quad \text{mit} \quad z_{\infty 1} = e^{s_{\infty 1} T}, \quad z_{\infty 2} = e^{s_{\infty 2} T}$$

reelle Pole

Gemäß (2.52) ergibt sich für den Nenner durch Zusammenfassen zweier Ausdrücke ersten Grades zu einem Ausdruck zweiten Grades:

$$c_1 = -(e^{s_{\infty 1} T} + e^{s_{\infty 2} T})$$

$$c_0 = e^{(s_{\infty 1} + s_{\infty 2}) T}$$

Gl. (2.54) in Gl. (2.51) eingesetzt, ergibt wieder nach Zusammenfassen zweier Ausdrücke ersten Grades die Beziehungen für den Zähler:

$$b_2 = 0$$

$$b_1 = \frac{R_1 \cdot (e^{s_{\infty 1} T} - 1)}{s_{\infty 1}} + \frac{R_2 \cdot (e^{s_{\infty 2} T} - 1)}{s_{\infty 2}} \quad (2.55)$$

$$b_0 = \left(\frac{R_1 \cdot (1 - e^{-s_{\infty 1} T})}{s_{\infty 1}} + \frac{R_2 \cdot (1 - e^{-s_{\infty 2} T})}{s_{\infty 2}} \right) \cdot e^{(s_{\infty 1} + s_{\infty 2}) T}$$

wobei R_1 bzw. R_2 die zu $s_{\infty 1}$ bzw. $s_{\infty 2}$ gehörenden Residuen sind.

konjugiert komplexe Pole:

Sei $z_{\infty 1} = e^{s_{\infty 1} T}$; $z_{\infty 2} = e^{s_{\infty 2}^* T}$; $s_{\infty} = \sigma_{\infty} + j\omega_{\infty}$

Gl. (2.52) ergibt dann:

$$c_1 = -2 e^{\sigma_{\infty} T} \cdot \cos \omega_{\infty} T$$

$$c_0 = e^{2\sigma_{\infty} T}$$

Gl. (2.51) mit Gl. (2.54) liefert für den Zähler:

$$\begin{aligned} b_2 &= 0 \\ b_1 &= \frac{-2(a\sigma_{\infty} + b\omega_{\infty}) + 2e^{\sigma_{\infty} T} ((a\sigma_{\infty} + b\omega_{\infty}) \cos \omega_{\infty} T + (a\omega_{\infty} - b\sigma_{\infty}) \sin \omega_{\infty} T)}{\sigma_{\infty}^2 + \omega_{\infty}^2} \\ b_2 &= \frac{2e^{2\sigma_{\infty} T} (a\sigma_{\infty} + b\omega_{\infty}) - 2e^{\sigma_{\infty} T} ((a\sigma_{\infty} + b\omega_{\infty}) \cos \omega_{\infty} T - (a\omega_{\infty} - b\sigma_{\infty}) \sin \omega_{\infty} T)}{\sigma_{\infty}^2 + \omega_{\infty}^2} \end{aligned} \quad (2.56)$$

mit der Abkürzung $R = (a + jb)$

ii lineare Interpolation

Bei der linearen Interpolation wurde der Einfachheit halber die Gorille-Transformation auf das jeweilige bereits im s-Bereich zusammengefaßte Teilsystem zweiten Grades angewendet. Die Teilsysteme $H_v(s)$ ergeben sich zu:

reelle Pole

$$H_v(s) = \frac{R_1}{s - s_{\infty 1}} + \frac{R_2}{s - s_{\infty 2}} = \frac{B_1 s + B_0}{s^2 + C_1 s + C_0}$$

mit $C_2 = 1$

$$C_1 = -(s_{\infty 1} + s_{\infty 2})$$

$$C_0 = s_{\infty 1} \cdot s_{\infty 2} \quad (2.57)$$

und $B_2 = 0$

$$B_1 = R_1 + R_2$$

$$B_0 = -(R_1 s_{\infty 2} + R_2 \cdot s_{\infty 1})$$

konjugiert komplexe Pole

$$H_v(s) = \frac{R}{s-s_{\infty}} + \frac{R^*}{s-s_{\infty}^*} = \frac{B_1 s + B_0}{s^2 + C_1 s + C_0} ;$$

mit $s_{\infty} = \sigma_{\infty} + j\omega_{\infty} ; R = a + jb$

ist $C_2 = 1$

$$C_1 = -2\omega_{\infty}$$

$$C_0 = \sigma_{\infty}^2 + \omega_{\infty}^2 \quad (2.58)$$

und $B_2 = 0$

$$B_1 = 2a$$

$$B_0 = -2(a \cdot \sigma_{\infty} + b \cdot \omega_{\infty})$$

2.3.2 Vergleich mit Othmer Verfahren

Gegenüber dem Othmer-Verfahren hat das Parallel-Verfahren den Vorteil, daß nur Teilsysteme zweiten Grades transformiert werden müssen. Das bedeutet, daß in diesem Fall die mit wachsendem Systemgrad stark zunehmenden numerischen Ungenauigkeiten hier wesentlich weniger ins Gewicht fallen.

Ein Vergleich der Fehlerkurven für den Cauer-T.P. bei Sprungerregung zeigt Bild 2.17. Gerechnet wurde an der PDP 11 mit 24 bit Mantissenwortlänge (2.17a).

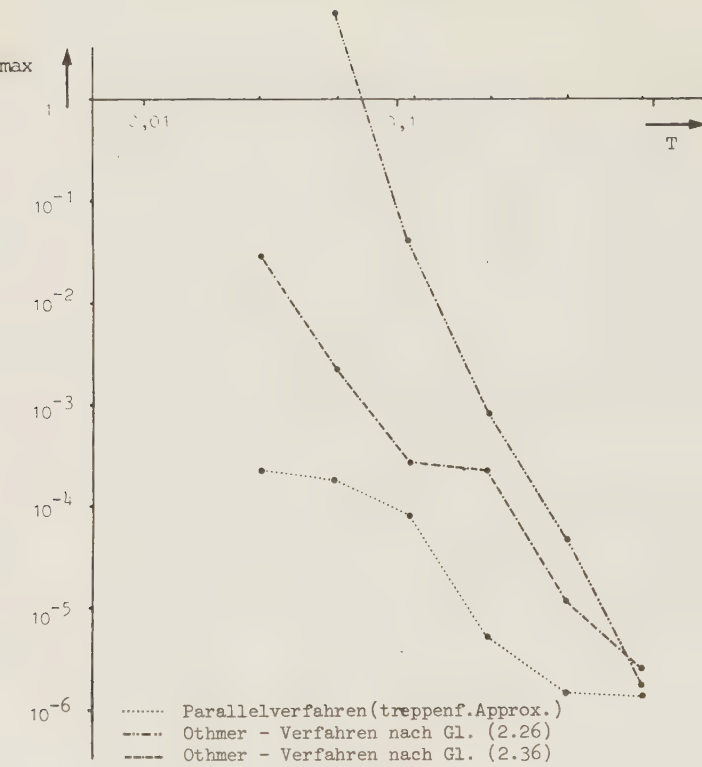


Bild 2.17a: Vergleich des maximalen Fehlers bei Sprungantwort des Cauer-T.P. für Parallel- und Othmer-Verfahren. Mantissenwortlänge 24 bit.

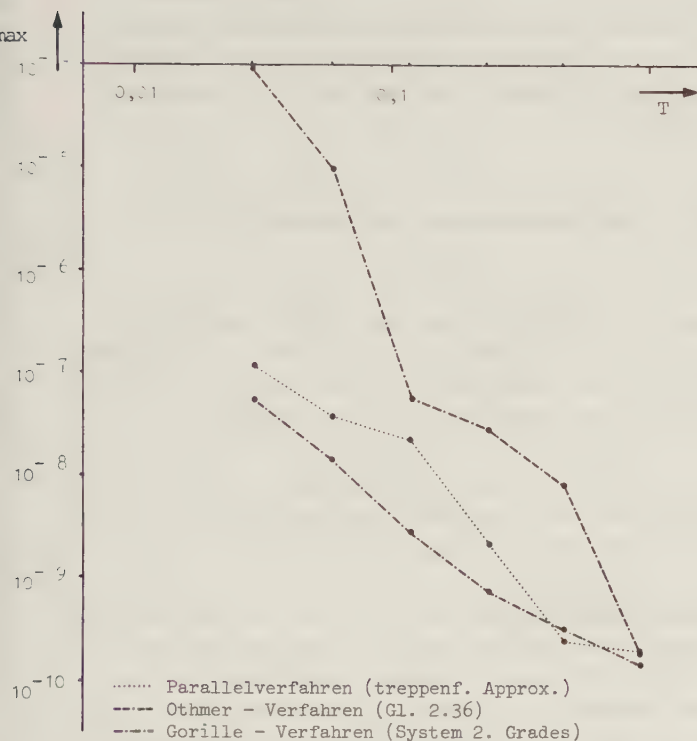


Bild 2.17b: Vergleich des maximalen Fehlers bei Sprungantwort des Cauer-T.P. für Parallel- und Othmer-Verfahren mit dem Fehler bei Sprungantwort eines Systems 2.Grades bei Gorille-Transformation. Mantissenwortlänge 36 bit.

In Bild 2.17b wurde an der CD 3300 mit 36 bit Mantissenwortlänge gerechnet. Dabei ist zur Veranschaulichung der Genauigkeitssteigerung die Abweichung der Sprungantwort des in 2.2.3.1 vorgestellten Systems 2. Grades, das nach Gorille transformiert wurde, eingezeichnet.

In beiden Bildern wurde das Parallelverfahren bei treppenförmiger Approximation der Eingangsfunktion betrachtet.

Da die Genauigkeit des Parallelverfahrens jedoch trotz der einfachen Transformation von Blöcken zweiten Grades nach wie vor von der Genauigkeit der Zählerkoeffizienten abhängt (siehe Abschn. 2.2.3 und 2.2.4) erscheint es sinnvoll, die Koeffizienten der einzelnen Teilsysteme doppelt genau zu berechnen.

Betrachtet man die Bilder 2.7 und 2.8, so lassen sich daraus zwei Tatsachen ablesen, die diese Aufwandserhöhung für die anderen Verfahren nicht rechtfertigen.

- i Die Genauigkeitssteigerung von 24 bit auf 36 bit Mantissenwortlänge bringt für das Othmer Verfahren zwar eine höhere Genauigkeit der Ausgangsfunktion, jedoch wächst bei kleiner werdender Rechnerschrittweite der Fehler so stark an, daß das Othmer Verfahren schlechter als die bilineare Transformation wird, d.h. daß für das Othmer Verfahren eine doppelt genaue Rechnung nicht gerechtfertigt ist.
- ii Die Transformationen, die einen Verfahrensfehler enthalten, der erst mit kleiner werdender Rechenschrittweite abnimmt, können bei gleicher Schrittweite T auch durch Erhöhung der Mantissenwortlänge keine genaueren Ausgangssignalwerte liefern; daher nützt bei diesen Verfahren eine doppelt genaue Rechnung für die hier betrachteten Rechenschrittweiten nichts.

In Bild 2.18 ist die Fehlerkurve für den Cauer-T.P. bei Sprungerregung aufgetragen. Dabei wurden die Koeffizienten doppelt genau berechnet, die Filterung jedoch erfolgte wie bei allen anderen Verfahren mit einfacher Genauigkeit.

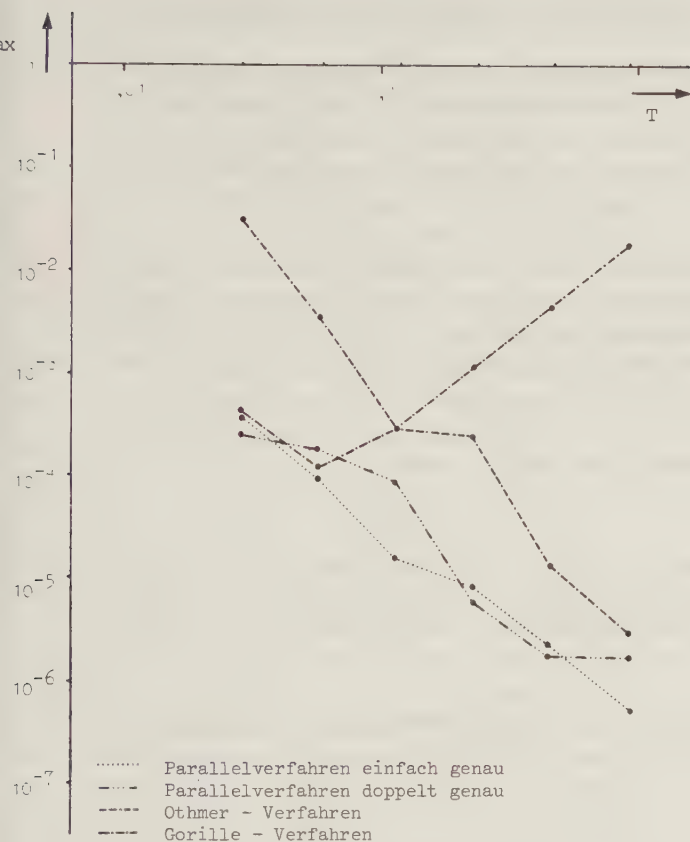


Bild 2.18: Maximaler Fehler bei Sprungantwort des Cauer-T.P. bei Transformation nach Parallel-Verfahren einfach und doppelt genau, Othmer- und Gorille-Verfahren. Mantissenwortlänge 24 bit.

2.3.3 Vorteile und Beschränkungen beim Parallelverfahren

Unter den Simulationsverfahren, die mit rationaler Übertragungsfunktion des kontinuierlichen Systems arbeiten, nimmt das Parallelverfahren - ebenso wie das Othmer-Verfahren - für sich in Anspruch, theoretisch für beliebigen Systemgrad exakte Ausgangssignalwerte zu liefern, wenn sich die Eingangsfunktion in der Form von Gl. (2.9) darstellen läßt. In der praktischen Erprobung bietet das Parallelverfahren jedoch den Vorteil gegenüber dem üblichen Othmer-Verfahren, nur Teilsysteme zweiten Grades zu transformieren. (Entspricht für lineare Interpolation dem Gorille-Verfahren, vermeidet aber durch Parallelanordnung dessen Nachteile). Damit lassen sich die numerischen Schwierigkeiten, die bei der Transformation des Gesamtsystems nach Othmer auftraten, weitgehend vermeiden. (Vgl. dazu auch Abschnitt 4).

Liegt die Übertragungsfunktion $H(s)$ noch nicht in Partialbruchform vor, so muß sie erst mit Hilfe der Residuenrechnung gewonnen werden. Hierin liegen die beiden wesentlichen Einschränkungen:

- Für die Parallelstruktur, wie sie in Bild 2.2 dargestellt ist, können nur Systeme mit einfachen Polen transformiert werden.
- Die Berechnung der Koeffizienten für die Parallelstruktur ist ebenso empfindlich gegen numerische Fehler wie die Residuenrechnung zur Berechnung von Einschwingvorgängen. (|34|)

Jedoch bringt die Parallelstruktur eine Erweiterung gegenüber der Residuenrechnung, da sie für beliebige Eingangsfunktionen angewendet werden kann. D.h. es ist nicht nötig, die Laplace-Transformierte von $u(t)$ zu kennen. Die Genauigkeit der Ausgangsfunktion hängt wesentlich nur von der Güte der Approximation der Eingangsfunktion ab und natürlich von der Genauigkeit der Residuenrechnung.

Die Wahl der Interpolationsfunktion $\underline{G}(t)$, wie sie in Gl. (2.9)

definiert wurde, wirkt sich auf die Genauigkeit der Ausgangsfunktion allerdings entscheidend aus. Die Annäherung einer sinusförmigen Eingangsfunktion, wie sie im Abschn. 4.4 vorgestellt wird, mittels linearer Interpolation bringt gegenüber treppenförmiger Approximation eine Genauigkeitssteigerung der Ausgangssignalwerte von fast 2 Größenordnungen (vgl. dazu Kap. 4.5.3, Bild 4.15).

Eingangsfunktionen, die Sprünge enthalten, werden besser treppenförmig approximiert, da durch die lineare Interpolation die Sprungstellen verschwinden und dadurch große Fehler in der Ausgangsfunktion an diesen Stellen auftreten (vgl. dazu auch Bild 2.19).

2.4 Das Anfangswertproblem

Bei allen hier besprochenen Verfahren zur Simulation kontinuierlicher Systeme werden die Ausgangssignalwerte aus Differenzgleichungen gewonnen, deren Koeffizienten gleich den Koeffizienten der diskreten Übertragungsfunktion sind. Die eindeutige Lösung einer solchen Differenzgleichung n-ten Grades erfordert jedoch die Kenntnis von n Anfangswerten. In [14] sind die wesentlichen Verfahren erläutert, die für die Simulation in Frage kommen. Sie seien hier nochmals formelmäßig zusammengestellt. Die Anfangswerte seien mit ξ_0 und η_0 entsprechend Bild 2.4 bezeichnet; u_0 , u_1 seien der erste und zweite Abtastwert der Eingangsfunktion, a_1 , a_2 Anfangswerte des kontinuierlichen Teilsystems.

- bilineare Transformation

$$\eta_0 = \left(\frac{b_2 - b_1 + b_0}{c_2 - c_1 + c_0} - \frac{b_2}{c_2} \right) u_0 + (a_1 + a_2) \quad (2.59)$$

$$\begin{array}{l} \text{System} \\ \text{2. Grades} \end{array} \quad \xi_0 = \left(\frac{b_2 - b_1 + b_0}{c_2 - c_1 + c_0} \cdot \frac{c_0}{c_2} - \frac{b_2}{c_2} \right) \cdot u_0 - (a_1 \cdot z_{\infty 2} + a_2 z_{\infty 1})$$

$$\begin{array}{l} \text{System} \\ 1. \text{ Grades} \end{array} \quad \xi_0 = \left(\frac{b_1 - b_0}{c_1 - c_0} - \frac{b_1}{c_1} \right) u_0 + a_1$$

- matched z-Transformation, Boxer-Thaler-Transformation:

$$\eta_0 = (B_2 - b_2) \cdot u_0$$

$$\begin{array}{l} \text{System} \\ 2. \text{ Grades} \end{array} \quad \xi_0 = y_1 - b_2 \cdot u_1 - b_1 \cdot u_0 + c_1 B_2 \cdot u_0$$

$$\begin{array}{l} \text{System} \\ 1. \text{ Grades} \end{array} \quad \xi_0 = (B_1 - b_1) \cdot u_0 \quad (2.60)$$

$y_1 = y(T)$ wurde nach der Beziehung

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) \cdot U(s) \}$$

ermittelt für $t = T$, wobei $u(t)$ zwischen u_1 und u_0 linear interpoliert wurde.

- Gorille-Transformation:

$$\begin{array}{l} \text{System} \\ 2. \text{ Grades} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = -(q_0 \alpha_1 + q_1 \gamma_1) u_0 + q_0 a_1 + q_1 a_2 \\ \xi_0 = (q_0 \alpha_0 + q_1 \gamma_0 + q_2 c_1 - b_1) u_0 + (q_1 \beta_3 - q_0 \beta_4) a_1 + (q_0 \beta_2 - q_1 \beta_1) a_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{System} \\ 1. \text{ Grades} \end{array} \quad \xi_0 = - \frac{(B_0 - B_1 C_0) T}{(s_\infty T)^2} \cdot (e^{s_\infty T} - 1 - s_\infty T) u_0 + (B_0 - B_1 \cdot C_0) a_1$$

Dabei bedeuten:

$$\beta_1 = \frac{1}{\Delta} (s_2 e^{p_1} - s_1 e^{p_2})$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\Delta} (e^{p_2} - e^{p_1})$$

$$\beta_3 = \frac{C_0}{\Delta} (e^{p_1} - e^{p_2})$$

$$\beta_4 = \frac{1}{\Delta} (s_2 e^{p_2} - s_1 e^{p_1})$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta} (\beta_1 \alpha_1' + \beta_2 \gamma_1')$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\Delta} (\beta_1 \alpha_0' + \beta_2 \gamma_0')$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\Delta} (\beta_3 \alpha_1' + \beta_4 \gamma_1')$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\Delta} (\beta_3 \alpha_0' + \beta_4 \gamma_0')$$

$$p_1 = e^{s_{\infty 1} T} ; \quad p_2 = e^{s_{\infty 2} T} ; \quad \Delta = s_{\infty 2} - s_{\infty 1}$$

$$q_0 = B_0 - B_2 \cdot C_0 ; \quad q_1 = B_1 - B_2 \cdot C_1$$

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \frac{1 - e^{-p_2(1+p_2)}}{s_2 \cdot p_2} - \frac{1 - e^{-p_1(1+p_1)}}{s_1 \cdot p_1} \\ \alpha_0' &= \frac{1 - p_1 - e^{-p_1}}{s_1 \cdot p_1} - \frac{1 - p_2 - e^{-p_2}}{s_2 \cdot p_2} \\ \gamma_1' &= \frac{1 - e^{-p_2(1+p_2)}}{p_2} - \frac{1 - e^{-p_1(1+p_1)}}{p_1} \\ \gamma_0' &= \frac{1 - p_1 - e^{-p_1}}{p_1} - \frac{1 - p_2 - e^{-p_2}}{p_2} \end{aligned} \quad (2.61)$$

- Pottle-Verfahren (vgl. [10] und Bild 2.3)

1. Block

$$p_1(0) = 0$$

$$p_2(0) = -\frac{1}{2} u_0 \quad (2.62)$$

alle anderen Blöcke: $r_1(0) = -\frac{T}{12} u_0$

$$r_2(0) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{T}{12} \cdot C_1\right) u_0 + \frac{T}{12} \dot{u}_0$$

- Othmer-Verfahren

Nach [15] transformieren sich die Anfangswerte ξ_k (vgl. Bild 2.4) zu

$$\xi_k = \underline{C} \cdot \underline{Q}_k \cdot e^{\underline{A}(0)} \cdot \underline{x}_0 \quad (2.63)$$

mit

$$\underline{Q}_k = \sum_{v=0}^k c_{n-v} e^{\underline{A}T(k-v)} \quad 0 \leq k < n$$

Damit ergibt sich für die hier betrachteten zu Beginn energie-freien Systeme:

i bei treppenförmiger Approximation:

$$\xi_k = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.64)$$

ii bei linearer Interpolation (vgl. dazu Abschn. 2.2.2.1)

$$\xi_{n-\lambda} = -b_{(n-\lambda)} \cdot u_0 \quad \lambda = 1, \dots, n \quad (2.65)$$

Will man diese Anfangswerte für die nach Aufspaltung in Teilsysteme gewonnene Kaskadenstruktur erhalten, so kann man nach folgenden Beziehungen transformieren.

Sei
$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}_D \underline{x}(k) + \underline{B}_D u(k)$$

die Zustandsgleichung für die Struktur in der direkten Form nach Bild 2.4 und

$$\underline{q}(k+1) = \underline{A}_k \underline{q}(k) + \underline{b}_k u(k)$$

die Zustandsgleichung für die Kaskadenstruktur, dann läßt sich eine Transformationsmatrix T finden, die $\underline{A}_D$ in $\underline{A}_k$ überführt (vgl. [24]). Es sei

$$\underline{A}_k = \underline{T}^{-1} \underline{A}_D \underline{T}$$

Dann errechnet sich der Anfangszustandsvektor der Kaskadenstruktur $\underline{q}_0$ zu

$$\underline{q}_0 = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{x}_0$$

Es sei hier vermerkt, daß infolge der numerischen Schwierigkeiten darauf verzichtet wurde, diese Beziehungen zu programmieren (vgl. dazu auch 2.2.2.1).

- Parallelverfahren:

Für das Parallelverfahren bei treppenf. Approx. gilt wie beim Othmerverfahren und teppenf. Approx., daß man bei zu Beginn energiefreien kontinuierlichen Systemen keine Anfangswerte berechnen muß (siehe Gl. 2.64). Bei linearer Interpolation gelten für jedes Teilsystem die beim Gorille-Verfahren angeführten Beziehungen.

Treten in der Eingangsfunktion Sprünge auf, so kann sich bei den Verfahren, die in Abschn. 2.1.1 bis 2.1.6 beschrieben sind, an der Sprungstelle ein relativ großer Fehler ergeben.

Bild 2.19 zeigt den Fehlerverlauf über der Zeit für die als Beispiel gewählte Rechteckantwort eines in Abschnitt 4.3 beschriebenen "Rechteckfilters". Man erkennt, daß hierfür der Fehler formal der verschobenen Impulsantwort des Systems gleicht, wenn z.B. bilinear oder nach Gorille transformiert wurde.

Zum Vergleich ist in 2.19c der Fehlerverlauf bei Transformation nach dem Parallelverfahren (bei truppenförmiger Approximation) aufgetragen, bei dem dieser Effekt nicht auftritt.

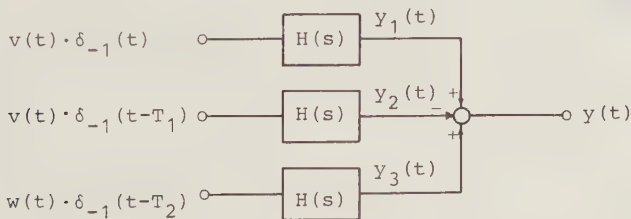
Eine analytische Untersuchung wird zeigen, daß bei allen Verfahren, deren Anfangswerte zu Beginn von Null verschieden sind, an Sprungstellen ein Fehler auftreten kann.

Das zu simulierende System $H(s)$ werde von einer Eingangsfunktion $u(t)$ erregt, die wie folgt definiert sei:

$$u(t) = v(t) (\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T_1)) + w(t) \delta_{-1}(t-T_2). \quad (2.66)$$

Es gelte $0 < T_1 \leq T_2$.

Die Ausgangsfunktion $y(t)$ läßt sich, wie in folgender Darstellung veranschaulicht wird, aus drei Teilfunktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ zusammensetzen.



Für die Simulation möge gelten, daß v_v , w_v , y_{1v} , y_{2v} , y_{3v} und y_v die Abtastwerte entsprechender Zeitfunktionen sind.

O.B.d.A. sei $T_1 = \kappa_1 T$ und $T_2 = \kappa_2 T$. (2.67)

A, B, C und d seien die Matrizen bzw. Vektoren der Zustandsraumbeschreibung des diskreten Systems.

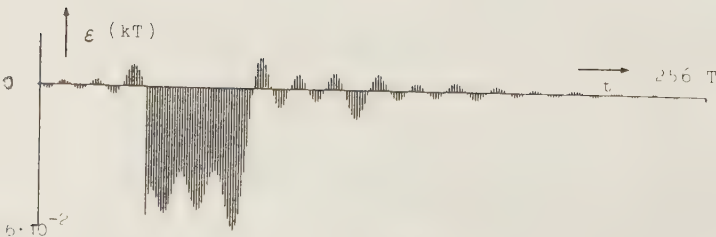
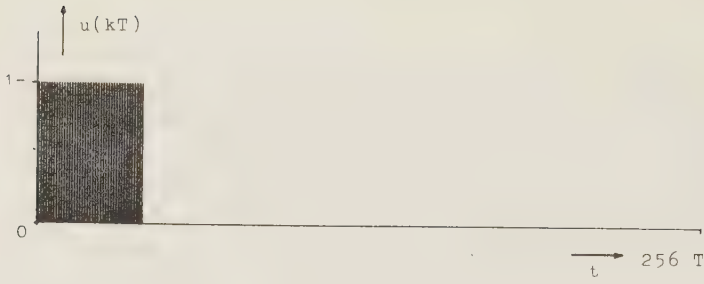


Bild 2.19a: zeitlicher Fehlerverlauf bei Sprung in der Eingangsfunktion; Rechteckfilter bilinear trans-

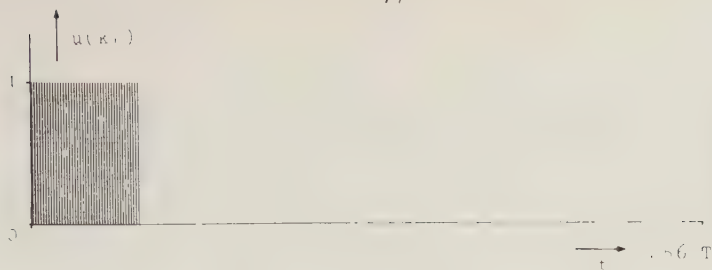


Bild 2.19b: Zeitlicher Fehlerverlauf bei Sprung in der Eingangsfunktion. Rechteckfilter nach Gorille transformiert. $T = 0,117$

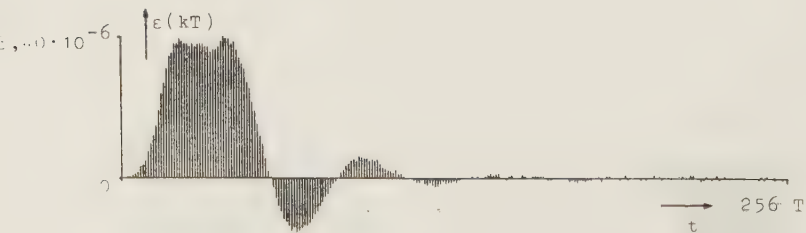
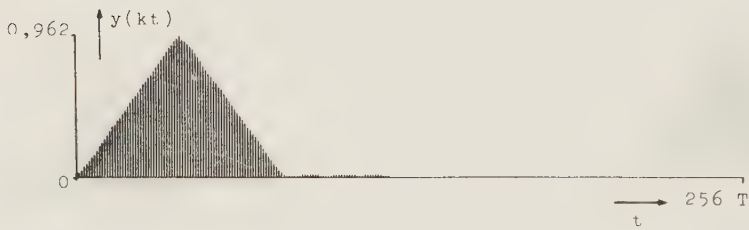
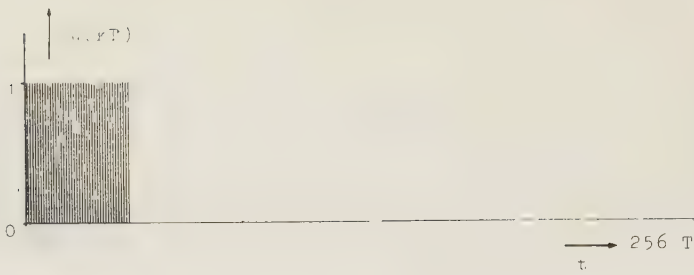


Bild 2.19c: Zeitlicher Fehlerverlauf bei Sprung in der Eingangsfunktion. Rechteckfilter transformiert nach Parallelverfahren. $T = 0,117$

Dann errechnen sich die drei Teilausgangsfolgen zu:

$$\begin{aligned}
 y_{1v} &= \underline{C} \underline{A}^v \underline{x}_0 + \underline{C} \sum_{\lambda=0}^{v-1} \underline{A}^\lambda \underline{B} v_{v-\lambda-1} + d \cdot v_v & \text{für } v > 0 \\
 y_{2v} &= \begin{cases} 0 & \text{für } v \leq \kappa_1 \\ \underline{C} \underline{A}^{v-\kappa_1-1} \underline{x}_0 + \underline{C} \sum_{\lambda=0}^{v-\kappa_1-2} \underline{A}^\lambda \underline{B} v_{v-\lambda-1} + d \cdot v_v & \text{für } v > \kappa_1 \end{cases} \\
 y_{3v} &= \begin{cases} 0 & \text{für } v \leq \kappa_2 \\ \underline{C} \underline{A}^{v-\kappa_2-1} \underline{x}_0 + \underline{C} \sum_{\lambda=0}^{v-\kappa_2-2} \underline{A}^\lambda \underline{B} w_{v-\lambda-1} + d \cdot w_v & \text{für } v > \kappa_2 \end{cases}
 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Daraus errechnet sich die Gesamtausgangsfolge zu:

$$\begin{aligned}
 y_v = y_{1v} - y_{2v} + y_{3v} &= \underline{C} \left(\underline{A}^v - \underline{A}^{v-\kappa_1-1} + \underline{A}^{v-\kappa_2-1} \right) \underline{x}_0 + \\
 &+ \underline{C} \sum_{\lambda=0}^{v-1} \underline{A}^\lambda \underline{B} u_{v-\lambda-1} + d \cdot u_v, \quad v > \kappa_2 \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

wenn u_v die Abtastwerte von $u(t)$ sind.

Bei der tatsächlichen Simulation wird jedoch $H(s)$ nur einmal transformiert und die Ausgangssignalfolge y_{v*} errechnet sich als Antwort auf die Abtastwerte u_v zu

$$y_{v*} = \underline{C} \underline{A}^v \underline{x}_0 + \underline{C} \sum_{\lambda=0}^{v-1} \underline{A}^\lambda \underline{B} u_{v-\lambda-1} + d \cdot u_v \quad (2.70)$$

Ein Vergleich der Gln. (2.69) und (2.70) ergibt, daß nur für $\kappa_1 = \kappa_2$ die gemäß dem Filtervorgang errechneten Ausgangssignalfolge mit den erwarteten Werten übereinstimmen.

Für $\kappa_2 > \kappa_1$ ergeben sich bei y_{v*} um

$$\epsilon_v = \underline{C} \left(\underline{A}^{v-\kappa_1-1} - \underline{A}^{v-\kappa_2-1} \right) \underline{x}_0 \quad v > \kappa_2 \quad (2.71)$$

verfälschte Werte.

Betrachtet man den Spezialfall des eingangs erwähnten Beispiels einer Rechteckerregung, so erhält man durch Wegfall des zweiten Terms in Gl. (2.71) die Form der verschobenen Impulsantwort. Definiert man nämlich

$$\tilde{\underline{B}} = \underline{x}_0,$$

so erhält man für diese Spezialisierung

$$\epsilon_v = \underline{C} \underline{A}^{v-\kappa_1-1} \tilde{\underline{B}} = \tilde{h}_{0v-\kappa} \quad v > \kappa_1 \quad (2.72)$$

Speziell bei Eingangsfunktionen, die sich aus einer Folge von Rechtecken zusammensetzen, wirkt sich dieser Fehler sehr stark aus.

Man kann den Fehler beseitigen, indem man an der Sprungstelle nochmals die Anfangswerte entsprechend der Transformation (vgl. Gl. (2.59) ff) zu den Augenblicksspeicherinhalten addiert. Am Beispiel der bilinearen Transformation und dem Gorille-Verfahren sei dies für die Rechteckantwort gezeigt. (Bild 2.20)

In der Praxis jedoch wird man erheblichen Aufwand treiben müssen, die Sprungstellen zu ermitteln, da diese im allgemeinen nicht vorher bekannt sind. Daher wurde für die weiteren Untersuchungen von der eben beschriebenen Möglichkeit der Fehlerkorrektur kein Gebrauch gemacht.

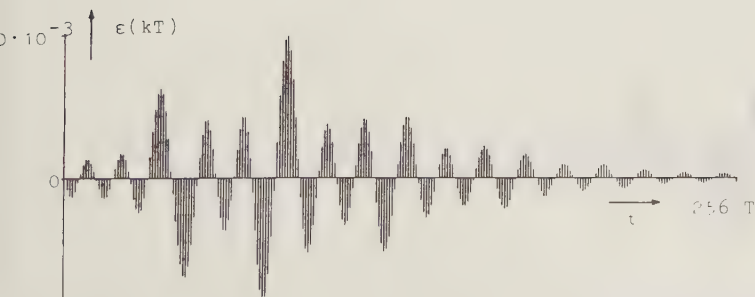
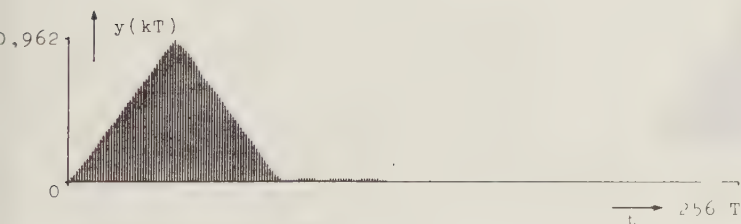
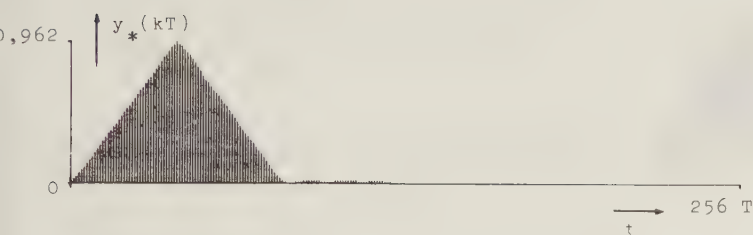
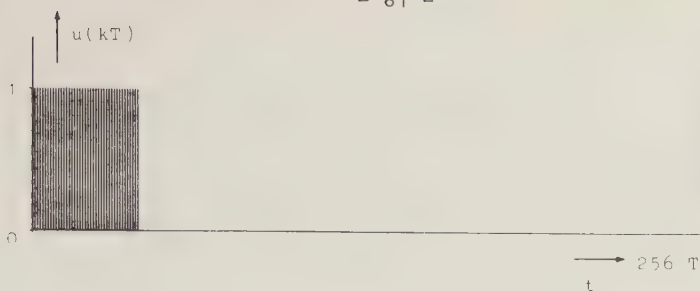
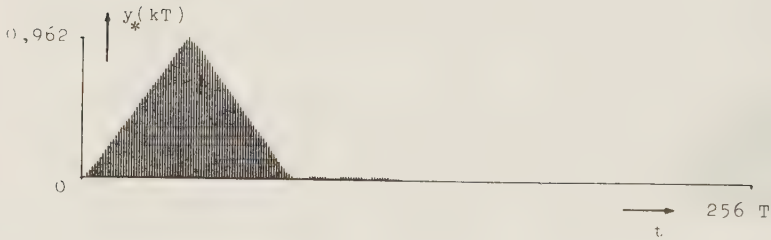
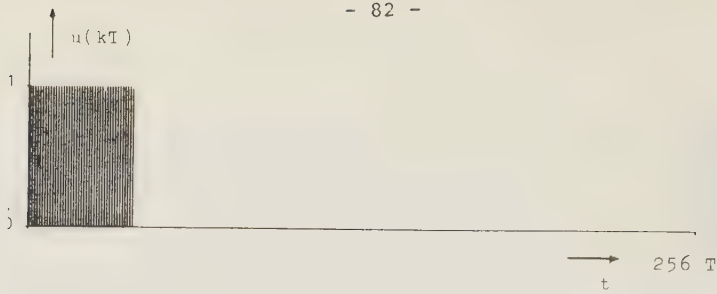


Bild 2.20a: Fehlerverlauf bei Zusatz der Anfangswerte an der Sprungstelle. Rechteckfilter bilinear transformiert. $T = 0,117$



$8,16 \cdot 10^{-4}$

Bild 2.20b: Fehlerverlauf bei Zusatz der Anfangswerte an der Sprungstelle. Rechteckfilter transformiert nach Gorille.

$T = 0,117$

3. Simulation der passiven Abzweigstruktur

In vielen Anwendungsfällen der Nachrichtenübertragung hat man passive Netzwerke vorliegen, deren Zeitverhalten man ohne vorherige Schaltungs-Analyse untersuchen möchte. Als Beispiel seien Test und Optimierung von Schaltungen nach vorangegangenem Filterentwurf angeführt. Man wünscht sich daher für eine Rechnersimulation eine diskrete Struktur, die sich direkt aus den normierten Bauelementen einer passiven Abzweigschaltung transformiert und die das Zeitverhalten dieses analogen Filters möglichst gut approximiert.

Als Strukturen, die diese Aufgabe erfüllen, kann man die von Fettweis [16], [17], [18] vorgestellten Wellendigitalfilterstrukturen heranziehen. Im folgenden wird eine möglichst allgemein verwendbare Struktur angegeben, die jedoch bezüglich Rechenzeit und Aufwand nicht optimiert wurde.

3.1 Eine allgemeine Simulationsstruktur

3.1.1 Forderungen an die Struktur

Für die Realisierung einer Simulationsstruktur seien folgende Forderungen aufgestellt.

- Es soll ein Abzweignetz nach Bild 3.1 simuliert

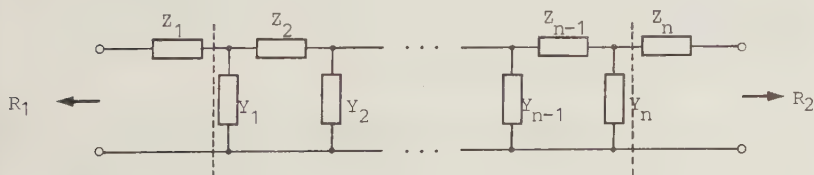
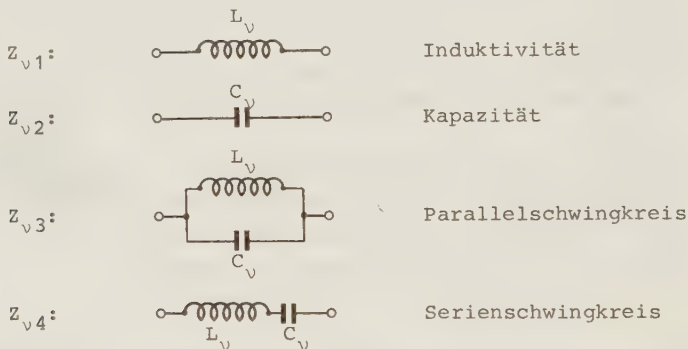


Bild 3.1: Analoges Abzweignetzwerk

werden, das mit beliebigen ohmschen Widerständen R_1 und R_2 nach beiden Seiten abgeschlossen sein kann. Das Netzwerk möge wahlweise mit Z_1 oder Y_1 beginnen und ebenso wahlweise mit Z_n oder Y_n enden.

Als komplexe Widerstände Z_v seien in beliebiger Reihenfolge erlaubt:



Weiter sollen Laufzeitketten mit Hilfe von Allpaßschaltungen realisiert und einem Abzweignetz nachgeschaltet werden können.

3.1.2 Gewählte Struktur

3.1.2.1 Zusammenstellung von Grundlagen

Auf Einzelheiten der Theorie von Wellendigitalfiltern soll hier nicht eingegangen werden. Dazu sei auf die Literatur verwiesen (z.B. [16], [19]). Jedoch seien an dieser Stelle einige grundlegende Beziehungen zusammengestellt, die im weiteren Verlauf dieses Abschnitts benötigt werden.

Als Signalflußgrößen werden in Wellendigitalfiltern Wellengrößen verwendet und zwar speziell die aus Linearkombinationen von Spannungen und Strömen gebildeten Spannungswellen. An einem Wellentor mit dem Torwiderstand R bestehen zwischen den Momentanwerten von Spannung u und Strom i und den Momentanwer-

ten der einlaufenden Welle a und der auslaufenden Welle b die folgende Beziehung:

$$a = u + iR \quad (3.1)$$

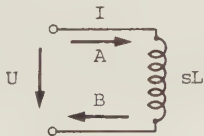
$$b = u - iR$$

Für jedes in einem analogen Filter vorkommende Element wird ein ihm entsprechendes Äquivalent im digitalen Bereich gebildet. Dabei wird die komplexe Frequenzvariable $s = \sigma + j\omega$ bilinear transformiert nach der Beziehung:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (3.2)$$

Bei Verwendung von Wellendigitalfiltern zur Simulation sind also prinzipiell dieselben Fehler wie bei der bilinearen Transformation zu erwarten.

Am Beispiel der Transformation einer Induktivität sei das Transformations-Verfahren erläutert.



U, I, A, B seien die komplexen Amplituden der in Gl. (3.1) definierten Größen.

Für die Induktivität lautet der Zusammenhang zwischen U und I :

$$U = s L \cdot I$$

Setzt man als Torwiderstand R für die Simulation

$$R_L = \frac{2}{T} \cdot L ,$$

dann erhält man mit Gl. (3.2):

$$U = \frac{z-1}{z+1} R_L \cdot I$$

und für die komplexen Amplituden der ein- bzw. auslaufenden Welle mit $R = R_L$:

$$A = \frac{2z}{z+1} I \cdot R_L \quad B = - \frac{2}{z+1} I \cdot R_L$$

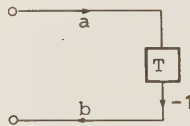
Daraus ergibt sich:

$$B = -z^{-1} \cdot A$$

oder für den Zeitbereich:

$$b(kT) = -a(kT-T)$$

mit dem zugehörigen Wellenflußdiagramm:



Ebenso lassen sich für alle weiteren Elemente entsprechende digitale Äquivalente erzeugen. Sie sind |16|, |19|, |25| zu entnehmen.

Zur Zusammenschaltung der einzelnen Wellentore zu einem Filter, müssen die Torwiderstände mit Hilfe von Adaptoren einander angeglichen werden. Bei der zu realisierenden Abzweigschaltung muß jeweils der Torwiderstand des Eingangstores zusammen mit dem Torwiderstand des nach obiger Methode transformierten komplexen Widerstandes Z_v (bzw. Leitwerts Y_v) an den Torwiderstand des nachfolgenden parallelen oder seriellen Teilstücks angepaßt werden. Dabei wechseln sich Serien- und Parallelschaltung der Torwiderstände ab (siehe Bild 3.2). Aus Bild 3.2 ergibt sich auch, daß alle Adaptoren, die hier in Frage kommen, maximal 3 Tore haben und Tor 3 von Adaptor μ mit Tor 1 von Adaptor $\mu+1$ verbunden ist. Das bedeutet gleichzeitig, daß $R_{3\mu} = R_{1\mu+1}$ sein muß.

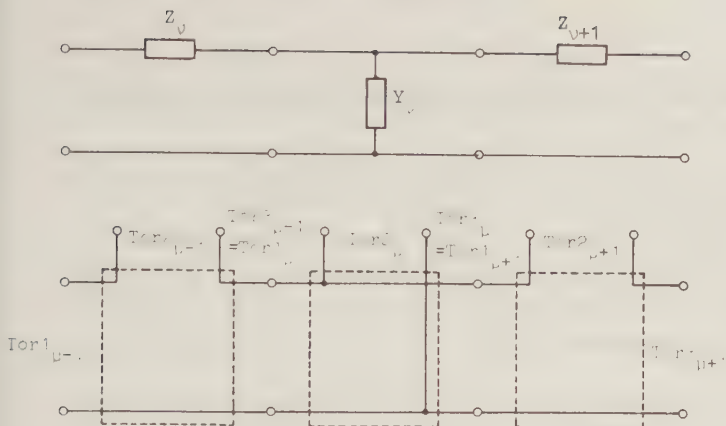


Bild 3.2: Aufspalten der Struktur in 3-Tor-Abschnitte

Der zur Anpassung einer Parallelschaltung von Toren notwendige Adaptor heißt Paralleladaptor, der zur Serienschaltung benötigte heißt Serienadaptor. Die Symbole dafür sind in Bild 3.3 dargestellt.

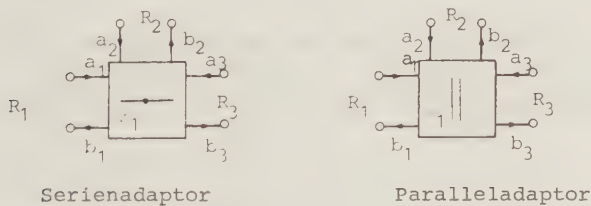


Bild 3.3: Adaptor-Symbole, Torwiderstände R_1, R_2, R_3

Aus der Theorie der Wellendigitalfilter (z.B. [19]) geht hervor, daß für eine Abzweigschaltung nur Adaptern mit sog. reflexionsfreien Toren zusammengeschaltet werden können. Für diese Adaptern läßt sich außerdem der Torwiderstand des Ausgangs-Tores aus dem Torwiderstand des Eingangstores und dem aus dem Bauelement transformierten Tor errechnen (sog. abhängiges Tor).

Die Einzelheiten der hier verwendeten Adaptorstrukturen sind Bild 3.7 zu entnehmen, das die gesamte Simulationsstruktur angibt. Nachfolgend sind die Adaptorgleichungen angegeben,

durch die die unterschiedlichen Torwiderstände miteinander verknüpft sind.

- i Adaptoren mit abhängigem und reflexionsfreiem Tor
(vgl. Bild 3.3)

Serienschaltung

R_3 ergibt sich aus

$$R_3 = R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & -\beta_1 & -\beta_1 \\ -1 & 0 & -1 \\ \beta_1^{-1} & \beta_1^{-1} & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

(3.3)

Parallelschaltung

$G_3 = \frac{1}{R_3}$ ergibt sich aus

$$G_3 = G_1 + G_2$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & 1 & 1-\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 & 1-\alpha_1 \\ \alpha_1 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

(3.4)

a_κ und b_κ sind die ein- bzw. auslaufenden Wellen am Tor Nr. κ .

$$\beta_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} \quad \alpha_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2}$$

- ii Adaptoren, die 3 unterschiedliche Torwiderstände anpassen müssen (Endadaptoren)

Serienschaltung

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & -\beta_1 & -\beta_1 \\ \beta_1+\beta_2^{-2} & \beta_1+\beta_2^{-1} & \beta_1+\beta_2^{-2} \\ -\beta_2 & -\beta_2 & 1-\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

(3.5)

Parallelschaltung

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{-1} & 2-\alpha_1-\alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 1-\alpha_1-\alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 2-\alpha_1-\alpha_3 & \alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

(3.6)

mit

$$\beta_1 = \frac{2R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

$$\alpha_1 = \frac{2G_1}{G_1+G_2+G_3}$$

$$\beta_2 = \frac{2R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\alpha_2 = \frac{2G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Die Anordnung der Tore sei wie in Bild 3.3.

Eine Abzweigschaltung läßt sich also als Kettenschaltung von 3-Tor-Adaptoren darstellen, deren drittes Tor reflexionsfrei ist. Der Endadaptor muß dabei 3 unterschiedliche Torwiderstände anpassen. Serien- und Paralleladaptoren wechseln sich ab.

An Tor 2 der Adaptoren ist das aus dem komplexen Widerstand Z_v bzw. Y_v transformierte Wellentor mit Torwiderstand R_2 bzw. G_2 angeschlossen (vgl. Bild 3.4).

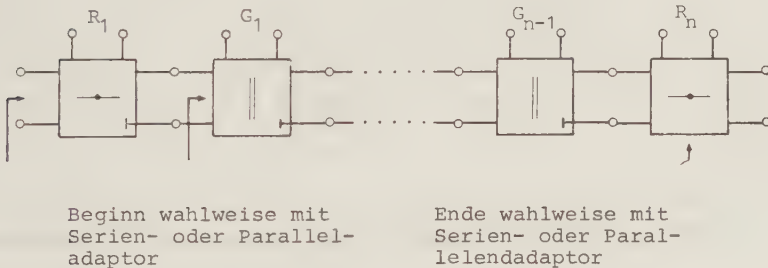


Bild 3.4: Grundstruktur einer transformierten Abzweigschaltung

3.1.2.2 Transformation der gewünschten komplexen Widerstände

In [16] werden zwei Wellendigitalfilterstrukturen für Parallel- und Serienschwingkreis angegeben, die sich nur durch eine Vorzeichenumkehr und unterschiedliche Werte für den Adaptor-Multiplizierer unterscheiden. Modifiziert man diese Struktur durch Einfügen einer zweiten Möglichkeit zur Vorzeichenumkehr, so kann man allein durch Variation der Multipliziererwerte alle in Abschn. 3.1.1 geforderten komplexen Widerstände damit transformieren (vgl. dazu [26]). Der in dieser Struktur

verwendete Adaptor ist ein Zweitoradaptor mit einem Multiplizierer. Das Symbol dafür zeigt Bild 3.5.

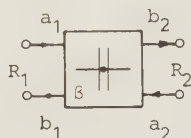


Bild 3.5: Zweitoradaptor

Die Übertragungsgleichungen lauten:

$$b_1 = a_2 + \beta(a_2 - a_1)$$

$$b_2 = a_1 + \beta(a_2 - a_1) \quad (3.7)$$

mit

$$\beta = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$$

Die oben genannte Struktur für das digitale Äquivalent eines allgemeinen komplexen Widerstandes ist in Bild 3.6 dargestellt.

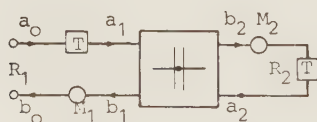


Bild 3.6: Struktur für einen allgemeinen komplexen Widerstand

Setzt man in Gl. (3.7) den Multipliziererwert $\beta = -1$, so wird der Adaptor praktisch kurzgeschlossen, und es ist

$$b_1 = a_1$$

Damit werden die diskreten Äquivalente für Induktivität und Kapazität (vgl. [16]) realisiert.

Im Einzelnen sind zur Transformation der verschiedenen Z_v folgende Multipliziererwerte einzustellen:

i Kapazität:

$$\begin{aligned} \beta &= -1 & \text{(Gl. 3.7)} & \Rightarrow & b_1 &= a_1 & R_1 &= R_C & (3.8) \\ M_1 &= +1 & & & b_0 &= a_0(k-1) \end{aligned}$$

ii Induktivität:

$$\begin{aligned} \beta &= -1 & \text{(Gl. 3.7)} & \Rightarrow & b_1 &= a_1 & R_1 &= R_L & (3.9) \\ M_1 &= -1 & & & b_0 &= -a_0(k-1) \end{aligned}$$

iii Parallelschwingkreis:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{R_C - R_L}{R_C + R_L} & R_1 &= \frac{R_L \cdot R_C}{R_L + R_C} & (3.10) \\ M_1 &= +1 & R_2 &= \frac{R_L^2}{R_L + R_C} \\ M_2 &= -1 \end{aligned}$$

iv Serienschwingkreis:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{R_L - R_C}{R_L + R_C} & R_1 &= R_L + R_C \\ M_1 &= +1 & R_2 &= \frac{(R_L + R_C) R_C}{R_L} & (3.11) \\ M_2 &= +1 \end{aligned}$$

Die Gl. (3.8) bis (3.11) verifizieren die in [16] angegebenen diskreten Äquivalente zu den genannten komplexen Widerständen.

Damit kommt man zusammen mit der in Bild 3.4 vorgestellten Grundstruktur zur kompletten für die Simulation von Abzweigschaltungen realisierten allgemeinen Wellendigitalfilterstruktur (Bild 3.7).

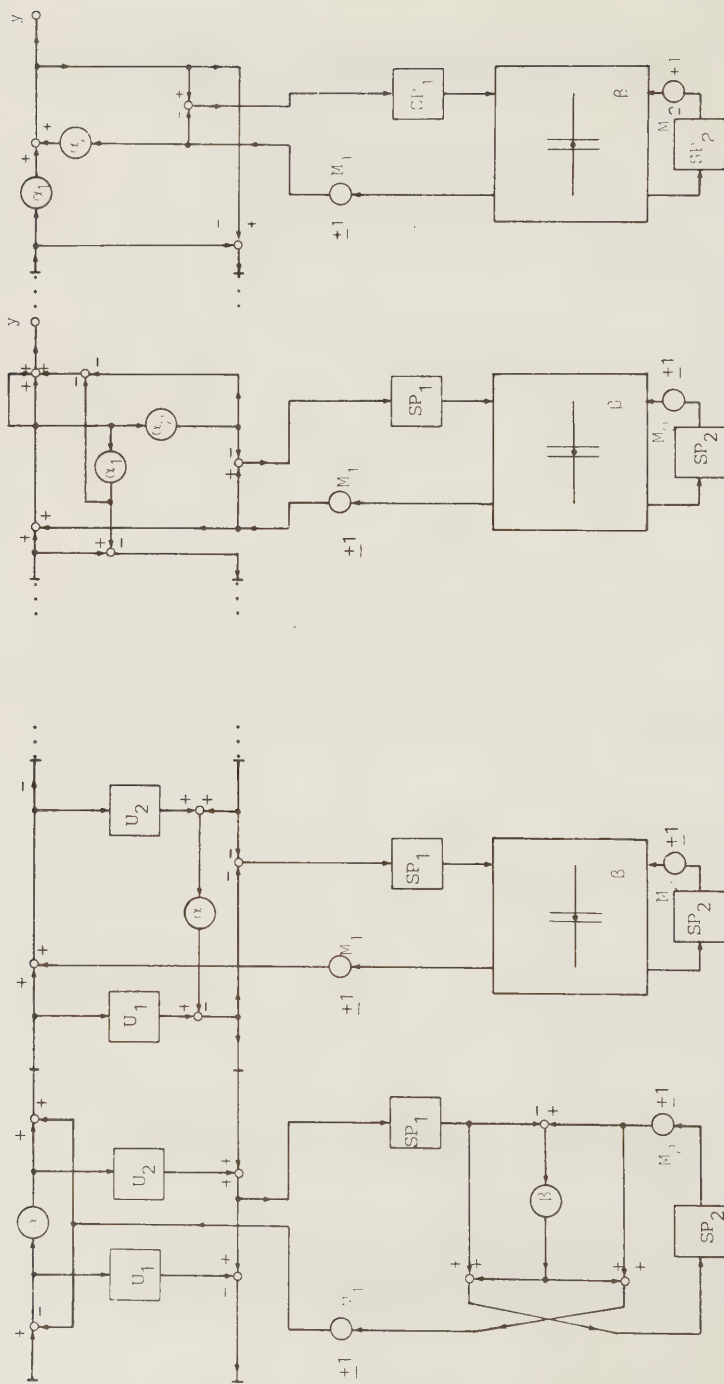


Bild 3.7: Struktur des allgemeinen Wellendigitalfilters für Abzweigschaltungen

3.1.3 Realisierung von Allpaßanteilen

Über die Realisierung von Allpaßübertragungsfunktionen für kontinuierliche Filter wird in der Literatur (z.B. [27], [28], [29]) ausführlich berichtet. Die hier gewählte Schaltung ist die in Bild 3.8 angegebene erdsymmetrische Brückenschaltung, da sie auf eine sehr einfache digitale Realisierung führt. Die Schaltung ist

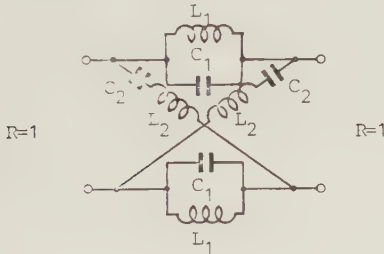


Bild 3.8: Allpaß in Brückenstruktur

dabei beidseitig mit $R = 1$ abgeschlossen.

$$H_A(s) = \frac{s^2 - a_1 s + a_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.12)$$

$$L_1 = \frac{a_1}{a_0} \quad C_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$L_2 = \frac{1}{a_1} \quad C_2 = \frac{a_1}{a_0}$$

Gl. (3.12) gibt die zugehörige Übertragungsfunktion zweiten Grades, sowie den Zusammenhang zwischen Koeffizienten und Bauelementen an. Aus Gl. (3.12) ergeben sich die folgenden Beziehungen für die komplexen Widerstände:

$$Z_{L1} = sL_1 = sC_2 = \frac{1}{Z_{C2}} = Y_{C2}$$

$$Z_{C1} = \frac{1}{sC_1} = \frac{1}{sL_2} = \frac{1}{Z_{L2}} = Y_{L2}$$

Mit Gl. (3.2) erhält man die normierten Torwiderstände der di-

gitalen Äquivalente:

$$R_{L1} = \frac{2}{T} \cdot L_1 = \frac{2}{T} C_2 = \frac{1}{R_{C2}} \quad (3.13)$$

$$R_{C1} = \frac{T}{2C_1} = \frac{T}{2L_2} = \frac{1}{R_{L2}}$$

Setzt man die in (3.13) gefundenen Beziehungen zwischen R_{L1} und R_{C2} bzw. R_{C1} und R_{L2} in die Gl. (3.10) und (3.11) für Parallel- bzw. Serienkreis ein, so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Torwiderständen R_{1p} , R_{2p} des Parallelkreises und R_{1s} , R_{2s} des Serienkreises:

$$R_{1p} = \frac{1}{R_{1s}} \quad (3.14)$$

$$R_{2p} = \frac{1}{R_{2s}}$$

Aus (3.14) errechnet sich der Wert für den Adaptormultiplizierer β gemäß Gl. (3.7) zu

$$\beta_p = \frac{R_{1p} - R_{2p}}{R_{1p} + R_{2p}} = \frac{R_{2s} - R_{1s}}{R_{1s} + R_{2s}} = -\beta_s \quad (3.15)$$

Betrachtet man die Struktur von Bild 3.6 mit den in (3.10) und (3.11) für Parallel- und Serienkreis definierten Multiplizierern, so erhält man folgende Übertragungsgleichungen:

Parallelkreis:

$$b_{1p}(k) = b_{2p}(k-1) + \beta_p (-b_{2p}(k-1) - a_{1p}(k)) \quad (3.16a)$$

$$b_{2p}(k) = a_1(k) + \beta_p (-b_{2p}(k-1) - a_{1p}(k))$$

Serienkreis:

$$b_{1s}(k) = b_{2s}(k-1) + \beta_s (b_{2s}(k-1) - a_{1s}(k)) \quad (3.16b)$$

$$b_{2s}(k) = a_{1s}(k) + \beta_s (b_{2s}(k-1) - a_{1s}(k))$$

Aus den Beziehungen von (3.16) erhält man nach einigen Umformungen:

$$b_{1p}(k) = -\beta_p a_1(k) - a_1(k-1) - \beta_p b_{1p}(k-1) \quad (3.17a)$$

$$b_{1s}(k) = -\beta_s a_1(k) + a_1(k-1) + \beta_s b_{1s}(k-1) \quad (3.17b)$$

Mit (3.15) ergibt sich daraus:

$$b_{1p}(k) = -b_{1s}(k) \quad (3.18)$$

Zur Realisierung der in Bild 3.8 angegebenen Brückenschaltung wird in der Literatur [18], [19] ein Brückenadaptor angegeben, der gleiche Torwiderstände voraussetzt (Bild 3.9). Dabei stellt Tor 1 die Eingangsseite, Tor 3 die Ausgangsseite, Tor 2 und 4 die Tore dar, an die die Brückenelemente angeschlossen sind.

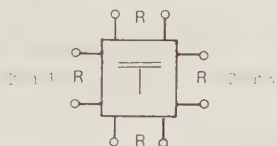


Bild 3.9: Symbol für einen Brückenadaptor

Da die als Allpaßfilter gewählte Brückenschaltung beidseitig mit $R=1$ abgeschlossen sein soll, müssen die Torwiderstände des oben beschriebenen Serien- und Parallelkreises an den normierten Torwiderstand des Brückenadaptors angepaßt werden. Die Anpassung erfolgt wieder über einen Zweitoradaptor (Bild 3.10).

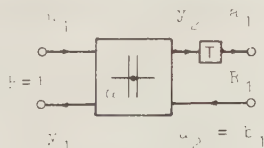


Bild 3.10: Anpassung der Schwingkreis-Torwiderstände an den normierten Widerstand $R=1$

Für das in Bild 3.10 gezeigte Diagramm gelten folgende Beziehungen:

$$\alpha = \frac{1-R_1}{1+R_1} \quad (3.19)$$

$$a_1(k) = y_2(k-1) \quad (3.20)$$

$$u_2(k) = b_1(k)$$

wobei allgemein gelten möge:

$$b_1 = b_{1p} \text{ bzw. } a_1 = a_{1p} \text{ für Parallelkreis gemäß Gl. (3.17a)}$$

$$b_1 = b_{1s} \text{ bzw. } a_1 = a_{1s} \text{ für Serienkreis gemäß Gl. (3.17b)}$$

$$R_1 = R_{1p} \text{ für Torwiderstand des Parallelkreises}$$

$$R_1 = R_{1s} \text{ für Torwiderstand des Serienkreises.}$$

Die Übertragungsgleichungen für die Schaltungen von Bild 3.10 lauten:

$$y_1(k) = u_2(k) + \alpha(u_2(k) - u_1(k)) \quad (3.21)$$

$$y_2(k) = u_1(k) + \alpha(u_2(k) - u_1(k))$$

Setzt man die Beziehungen von (3.20) in (3.21) ein und schreibt für $b_1(k)$ jeweils die in (3.17a) bzw. (3.17b) gefundenen Gleichungen, so erhält man nach einigen Umformungen:

für den Parallelkreis:

$$y_{1p}(k) = -\alpha_p \cdot u_1(k) - (\beta_p + \alpha_p \beta_p) u_1(k-1) - u_1(k-2) - (\beta_p + \alpha_p \beta_p) y_{1p}(k-1) - \alpha_p y_{1p}(k-2) \quad (3.22)$$

für den Serienkreis:

$$y_{1s}(k) = -\alpha_s \cdot u_1(k) - (\beta_s - \alpha_s \beta_s) u_1(k-1) + u_1(k-2) + (\beta_s - \alpha_s \beta_s) y_{1s}(k-1) + \alpha_s y_{1s}(k-2)$$

Dabei ist nach Gl. (3.19):

$$\alpha_s = \frac{1-R_{1s}}{1+R_{1s}} \quad (3.23)$$

$$\alpha_p = \frac{1-R_{1p}}{1+R_{1p}}$$

Nach Gl. (3.14) ist $R_{1p} = \frac{1}{R_{1s}}$

damit in Gl. (3.23) eingesetzt ergibt:

$$\alpha_s = -\alpha_p \quad (3.24)$$

Mit Gl. (3.24) ergeben sich die Gl. (3.22) zu:

$$y_{1p}(k) = \alpha_s u_1(k) + (\beta_s - \alpha_s \beta_s) u_1(k-1) - u_1(k-2) + (\beta_s - \alpha_s \beta_s) y_{1p}(k-1) + \alpha_s y_{1p}(k-2)$$

$$y_{1s}(k) = -\alpha_s u_1(k) - (\beta_s - \alpha_s \beta_s) u_1(k-1) + u_1(k-2) + (\beta_s - \alpha_s \beta_s) y_{1s}(k-1) + \alpha_s y_{1s}(k-2)$$

Damit: $y_{1s} = -y_{1p} \quad (3.25)$

Das ausführliche Wellenflußdiagramm für den in Bild 3.9 symbolisch vorgestellten Brückenadaptor zeigt Bild 3.11.

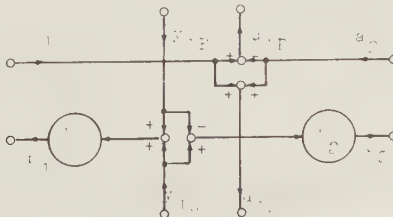


Bild 3.11: Wellenflußdiagramm für Brückenadaptor

Unter Beachtung von (3.25) erhält man:

$$b_2 = 1/2 \cdot (y_{1s} + y_{1s}) = y_{1s} \quad (3.26)$$

$$b_1 = 1/2 \cdot (y_{1s} - y_{1s}) = 0$$

Schaltet man n-Allpässe von dieser Art zu einer Laufzeitkette zusammen, so gilt für die rücklaufende Welle:

$$a_{2v} = b_{1v+1} \quad \text{für } v = 1, \dots, n-1 \quad (3.27)$$

Bei Abschluß des n-ten Allpasses mit $R=1$ folgt nach den Transformationsregeln für ohmsche Widerstände:

$$a_{2n} = 0$$

Nach (3.26) gilt

$$b_{1v} = 0 \quad \forall v$$

Mit (3.27) gilt so allgemein:

$$a_{2v} = 0 \quad \forall v$$

Das Wellenflußdiagramm des Brückenadaptors vereinfacht sich damit zu der in Bild 3.12 dargestellten Form:

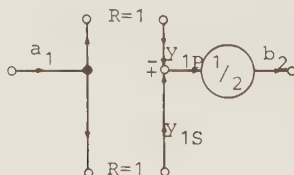


Bild 3.12: Brückenadaptor bei Allpässen

Berücksichtigt man nun noch Gl. (3.25), dann erhält man die endgültige Struktur für Allpaßglieder zweiten Grades nach Bild 3.13.

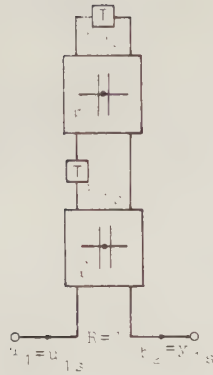


Bild 3.13: Wellendigitalstruktur eines Allpasses zweiten Grades

Man erhält daraus die folgenden Beziehungen:

Nach Gl. (3.11): $R_{1s} = R_L + R_C$

$$R_{2s} = \frac{(R_L + R_C) \cdot R_C}{R_L} \quad (3.28)$$

$$\beta = \frac{R_L - R_C}{R_L + R_C} \quad (3.29)$$

Nach Gl. (3.19) $\alpha = \frac{1 - R_L - R_C}{1 + R_L + R_C} \quad (3.30)$

Wenn nach Gl. (3.13) $R_L = \frac{2}{T} \cdot L_2$

$$R_C = \frac{T}{2 \cdot C_2}$$

und wenn L_2 , C_2 die in Bild 3.8 festgelegten normierten Bauelementegrößen des Serienkreises sind.

Somit ist eine einfache Allpaß-Struktur gefunden, die sich zu beliebig langen Laufzeitketten zusammenschalten läßt und die direkt an eine Abzweigstruktur nach Bild 3.7 angehängt werden kann, wenn der Endadaptor an den Abschluß-Widerstand $R=1$ anpaßt.

3.2 Anfangswerte bei Wellendigitalfilterstrukturen

Die Simulation mit Hilfe von Wellendigitalfilterstrukturen basiert ebenso wie die Simulation mit rationalen Übertragungsfunktionen auf der Lösung von Differenzengleichungen. Daher ist auch hier zur eindeutigen Lösung der Simulationaufgabe die Kenntnis von Anfangswerten notwendig.

Da die Strukturen durch Transformation einzelner Bauelemente entstehen, können auch die Anfangswerte abschnittsweise aus den Bedingungen für Strom und Spannung beim Einschaltvorgang an den einzelnen Bauelementen abgeleitet werden. Dabei wird die zu simulierende Abzweigstruktur in Teilabschnitte mit je einem der in Abschn. 3.11 zugelassenen komplexen Widerstände X_v bzw. Y_v zerlegt. Jeder Abschnitt wird dabei als 3-Tor aufgefaßt und mit dem entsprechenden digitalen Äquivalent verglichen. Bild 3.14 soll diesen Vorgang veranschaulichen, für den ersten Abschnitt sind die sich entsprechenden Größen eingetragen.

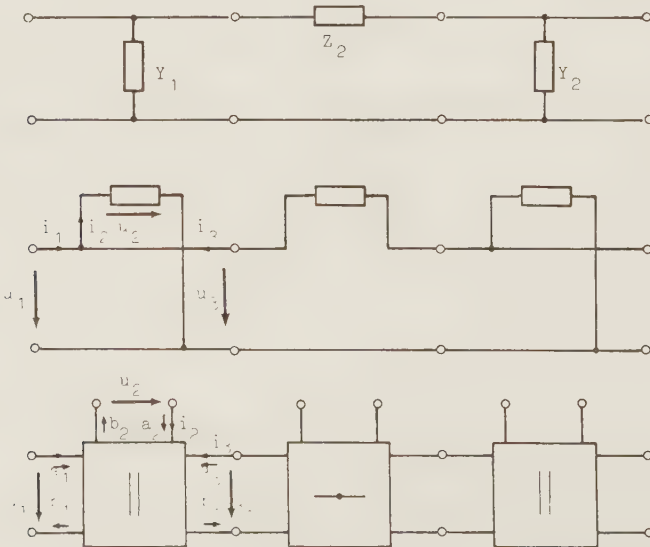


Bild 3.14: Auftrennen der Struktur in 3-Tor-Abschnitte

Entsprechend den Schaltungsmöglichkeiten der komplexen Widerstände als Z oder Y und deren Realisierungen als Induktivität, Kapazität, Serien- oder Parallelschwingkreis sowie den beiden Möglichkeiten, die zugehörigen digitalen Äquivalente an einen Adaptor mit reflexionsfreiem Tor oder an einen Endadaptor anzuschließen sind nachfolgend die Anfangswertberechnungen aufgegliedert.

3.2.1 Einzelelemente

Für einzelne Spulen und Kondensatoren ergeben sich gemäß ihrer Schaltungsanordnung folgende in Tabelle 3.1 zusammengestellte Bedingungen für den Einschaltzeitpunkt (unter Berücksichtigung der äußeren Beschaltung).

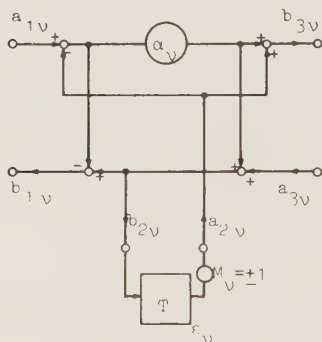
K a p a z i t ä t		I n d u k t i v i t ä t	
$u_{3v}(0) = 0$	$u_{2v}(0) = 0$	$u_{3v}(0) = u_{1v}(0)$	$i_{3v}(0) = i_{1v}(0) = 0$
$i_{1v}(0) = i_{2v}(0)$	$i_{3v}(0) = -i_{1v}(0)$	$i_{2v}(0) = 0$	$u_{2v}(0) = u_{1v}(0)$
$i_{3v}(0) = 0$	$u_{1v}(0) = u_{3v}(0)$	$i_{3v}(0) = -i_{1v}(0)$	$u_{3v}(0) = 0$

Tabelle 3.1: Bedingungen für Spannungen und Ströme zum Einschaltzeitpunkt

Zur digitalen Realisierung können die Äquivalente der in Tabelle 3.1 zusammengestellten Widerstände an die genannten vier Adaptortypen: Serien- und Paralleladaptor mit reflexionsfreiem Tor sowie Serien- und Parallelendadaptor wahlweise an-

Adaptoren mit reflexionsfreiem Tor

Paralleladaptor



$$b_{3v} = (a_{1v} - a_{2v})\alpha_v + a_{2v}$$

Kapazität

$$a_{2v}(0) = \epsilon_v(0)$$

$$\epsilon_v(0) = \frac{b_{3v}(0) - \alpha_v a_{1v}(0)}{1 - \alpha_v}$$

Mit Tab. 3.1 und Gl.

$$(3.1): b_{3v}(0) = 0$$

$$\epsilon_v(0) = -\frac{\alpha_v a_{1v}(0)}{1 - \alpha_v}$$

Folgerung:
Für nachfolgenden
Adaptor ist:

$$a_{1(v+1)}(0) = b_{3v}(0) = 0$$

Induktivität

$$a_{2v}(0) = -\epsilon_v(0)$$

$$\epsilon_v(0) = \frac{\alpha_v a_{1v}(0) - b_{3v}(0)}{1 - \alpha_v}$$

Mit Tab. 3.1 und Gl.

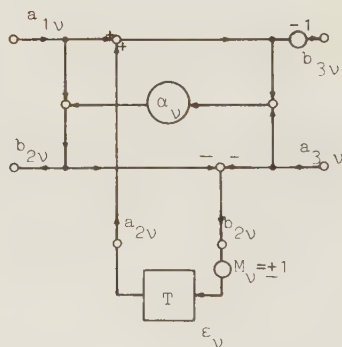
$$(3.1): b_{3v}(0) = a_{1v}(0)$$

$$\epsilon_v(0) = -a_{1v}(0)$$

Folgerung:
Für nachfolgenden
Adaptor ist:

$$a_{1(v+1)}(0) = a_{1v}(0)$$

Serienadaptor



$$b_{3v} = -(a_{1v} + a_{2v})$$

Kapazität

$$a_{2v}(0) = \epsilon_v(0)$$

$$\epsilon_v(0) = b_{3v}(0) - a_{1v}(0)$$

Mit Tab. 3.1 und Gl.

$$(3.1): -b_{3v}(0) = a_{1v}(0)$$

$$\epsilon_v(0) = 0$$

Folgerung:
Für nachfolgenden
Adaptor ist:

$$a_{1(v+1)}(0) = b_{3v}(0) = -a_{1v}(0)$$

Induktivität

$$a_{2v}(0) = -\epsilon_v(0)$$

$$\epsilon_v(0) = b_{3v}(0) + a_{1v}(0)$$

Mit Tab. 3.1 und Gl.

$$(3.1): -b_{3v}(0) = 0$$

$$\epsilon_v(0) = a_{1v}(0)$$

Folgerung:
Für nachfolgenden
Adaptor ist:

$$a_{1(v+1)}(0) = 0$$

geschlossen werden.

Zusammen mit den Bedingungen aus Tabelle 3.1 ergeben sich dann die in Tabelle 3.2 zusammengestellten Bedingungen für die Anfangsspeicherwerte und die daraus entstehenden Folgerungen.

3.2.2 Schwingkreise

Für die Schwingkreise gelten für den Einschaltzeitpunkt folgende in Tabelle 3.1 zusammengestellte Bedingungen.

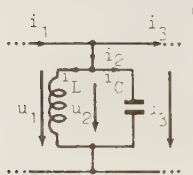
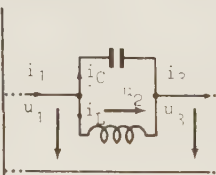
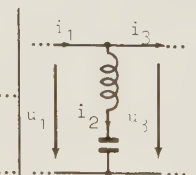
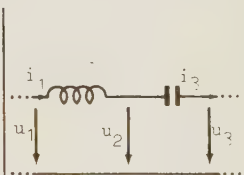
<u>Parallelkreis</u>		<u>Serienkreis</u>	
			
Es gilt:	Es gilt:	Es gilt:	Es gilt:
$i_L(0)=0$	$i_L(0)=0$	$i_L(0)=i_3(0)=0$	$i_L(0)=i_1(0)=0$
$i_C(0)=i_2(0)=$ $=i_1(0)$	$i_C(0)=i_1(0)=$ $=i_3(0)$	$i_1(0)=i_3(0)$	$i_1(0)=i_3(0)$
$u_2(0)=u_3(0)=0$	$u_2(0)=0$ $u_1(0)=u_3(0)$	$u_1(0)=u_3(0)$	$u_3(0)=0$
Verhältnisse wie bei Parallel-Kondensator	Verhältnisse wie bei Serien-Kondensator	Verhältnisse wie bei Parallelspule	Verhältnisse wie bei Längsspule

Tabelle 3.3: Bedingungen für Spannungen und Ströme zum Einschaltzeitpunkt

Die Berechnung der beiden Anfangsspeicherwerte $\epsilon(0)$ und $\eta(0)$ erfolgt durch Erfüllen von zwei Bedingungen, denen die Schwingkreise zum Anfangszeitpunkt genügen müssen.

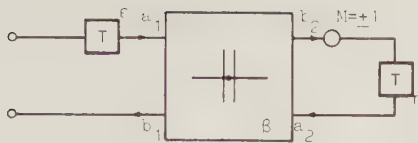


Bild 3.15: Digitale Schaltung mit 2-Tor Adaptor für Schwingkreise

Bedingung_1:

Aus Tabelle 3.3 geht hervor, daß am Tor 2, der Parallel- bzw. Serienadaptores gemäß Bild 3.14 bei Anschluß eines Parallelkreises zum Einschaltzeitpunkt die gleichen Verhältnisse herrschen müssen wie bei Anschluß einer Kapazität und bei Anschluß eines Serienkreises wie bei einer Induktivität.

D.h. es muß gelten (vgl. Tabelle 3.2):

$$b_1(0) = a_1(0) \quad \text{für Parallelkreis } (\hat{=} \text{ Kondensator})$$

$$b_1(0) = -a_1(0) \quad \text{für Serienkreis } (\hat{=} \text{ Spule})$$

Nach der inneren Struktur eines 2-Tor-Adaptors gilt aber:

$$b_1(0) = \eta(0) + \beta(\eta(0) - \varepsilon(0))$$

$$a_1(0) = \varepsilon(0)$$

Daraus ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den beiden Anfangsspeicherwerten nach folgender Beziehung:

$$\varepsilon(0) = \eta(0) + \beta(\eta(0) - \varepsilon(0)) \quad \text{für Parallelkreis} \quad (3.31)$$

$$\text{und } -\varepsilon(0) = \eta(0) + \beta(\eta(0) - \varepsilon(0)) \quad \text{für Serienkreis} \quad (3.32)$$

Damit wird dann Bedingung 1 erfüllt und es ist

$$b_1(0) = \epsilon(0) \quad \text{für Parallelkreis}$$

$$b_1(0) = -\epsilon(0) \quad \text{für Serienkreis}$$

Bedingung_2:

Da wie oben gezeigt im Anfangszeitpunkt Parallelkreis und Serienkreis wie ein einzelnes Element wirken, können zur Bestimmung von $\epsilon(0)$ die in Abschn. 3.2.1 gefundenen Bedingungen für Kondensator und Spule bei Anschluß an Parallel- bzw. Serienadaptor übernommen werden.

Vereinfacht man (3.31) und (3.32), so erhält man

$$(3.31) \Rightarrow \eta(0) = \epsilon(0)$$

$$(3.32) \Rightarrow \eta(0) = \epsilon(0) \cdot \frac{\beta-1}{\beta+1}$$

In Tabelle 3.4 sind für Serien-, Parallel-, Serienend- und Parallelendadaptor die Werte $\epsilon(0)$ gemäß Abschn. 3.2.1 zusammengestellt und $\eta(0)$ daraus nach (3.31) bzw. (3.32) errechnet.

	Paralleladaptor	Serienadaptor	Parallelendadaptor	Serienendadaptor
P	$\epsilon(0) = -\frac{\alpha a_1(0)}{1-\alpha} = \eta(0)$	$\epsilon_0 = 0 = \eta(0)$	$\epsilon(0) = -a_1(0) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \eta(0)$	$\epsilon(0) = -a_1(0) \cdot \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{2-\alpha_1-\alpha_2} = \eta(0)$
S	$\epsilon(0) = -a_1(0)$ $\eta(0) = -a_1(0) \cdot \frac{\beta-1}{\beta+1}$	$\epsilon(0) = a_1(0)$ $\eta(0) = a_1(0) \frac{\beta-1}{\beta+1}$	$\epsilon(0) = -a_1(0) \cdot \frac{1-\alpha_1}{\alpha_2}$ $\eta(0) = -a_1(0) \cdot \frac{(1-\alpha_1)(\beta-1)}{\alpha_2(\beta+1)}$	$\epsilon(0) = a_1(0)$ $\eta(0) = a_1(0) \cdot \frac{\beta-1}{\beta+1}$

Tabelle 3.4: Zusammenstellung der Anfangsspeicherwerte für Schwingkreise

P : Parallelkreis

S : Schwingkreis

Anfangswerte für Allpässe:

Nach Bild 3.13 ergibt sich bei Erfüllen von obiger Bedingung 1, daß gilt

$$b_2(0) = a_1(0)$$

Damit ergibt sich für Allpässe (da nur Serienkreise realisiert sind):

$$\epsilon(0) = - a_1(0)$$

$$\eta(0) = - \frac{\beta-1}{\beta+1} a_1(0)$$

3.2.3 Bemerkungen

Aus den Folgerungen von Abschnitt 3.2.1, Tabelle 3.2 ergaben sich die nachstehenden Konsequenzen:

- i Beginnt ein Netzwerk mit einem Parallelkondensator oder parallelgeschalteten Parallelschwingkreis, so ergibt sich, daß für alle nachfolgenden Glieder die Anfangswerte zu Null gesetzt werden können, da in allen Anfangswerten $\epsilon_v(0)$ entweder der Faktor $a_{1v}(0)$ enthalten ist, oder $\epsilon_v(0)$ ohnehin gleich Null zu setzen ist.
- ii Dasselbe gilt für ein Netzwerk, das mit einer Serieninduktivität oder in Serie geschaltetem Serienkreis beginnt.

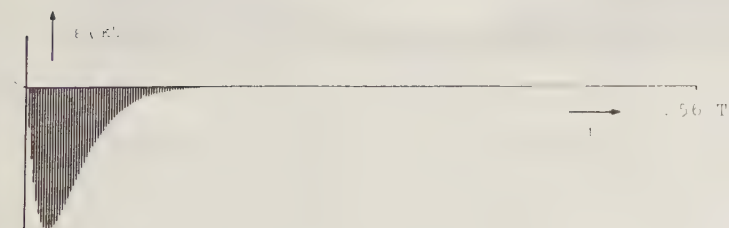
- iii Beginnt ein Netzwerk nicht mit den unter i und ii aufgeführten komplexen Widerständen, so müssen solange für jeden Teilabschnitt Anfangswerte berechnet werden, bis in einem Parallelabschnitt ein Y_v nach i, oder in einem Serienabschnitt ein Z_v gemäß ii auftaucht. Danach sind dann wieder alle Anfangsspeicher gleich Null.
- iv Weiter ergibt sich für alle zu berechnenden Anfangswerte, daß der benötigte Eingangssignalwert $a_{1v}(0)$ gleich dem Eingangssignalwert $a_1(0)$ des gesamten Systems ist für alle v .

3.3 Test der Struktur an verschiedenen Beispielen

Zum Test der Allgemeingültigkeit der gewählten Simulationsstruktur für Abzweignetzwerke wurden mehrere Beispiele gerechnet. Als Testeingangsfunktion wurde die Sprungfunktion gewählt. Zum Vergleich der Ausgangssignalwerte diente die Residuenrechnung.

In den Bildern 3.16a, ..., 3.16h sind für verschiedene Systeme die zeitlichen Verläufe von Eingangsfolge $u(kT)$, über Simulationsstruktur gewonnene Ausgangsfolge $y_*(kT)$, über Residuenrechnung gewonnene Ausgangsfolge $y(kT)$ und Fehler $\varepsilon(kT) = y(kT) - y_*(kT)$ dargestellt.

Pole, Nullstellen und Bauelemente der Systeme sind im Anhang zusammengefaßt.



$-h_1 \cdot (1 + 1) \cdot 10^{-10}$

Bild 3.16a: Sprungantwort des Systems $H(s) = \frac{2}{s + 4}$
 $T = 0,029$

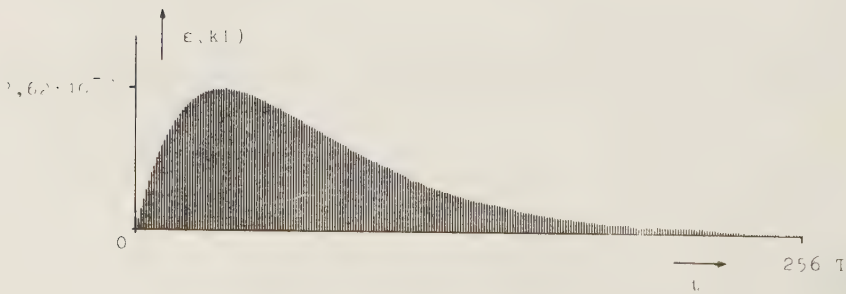
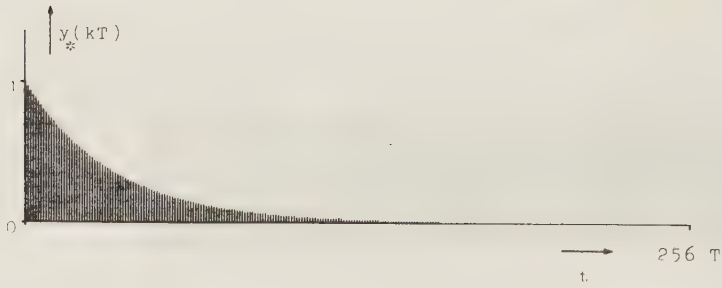
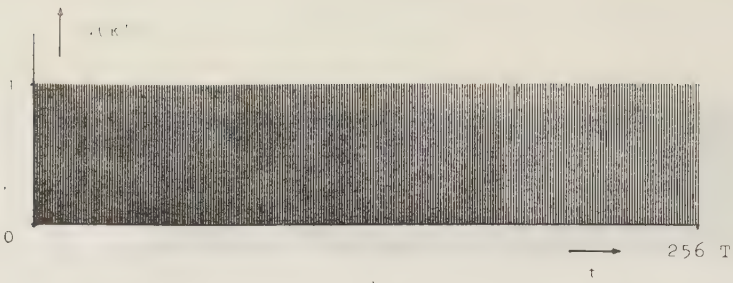


Bild 3.16b: Sprungantwort des Systems $H(s) = \frac{s}{s+1}$
 $T = 0,029$

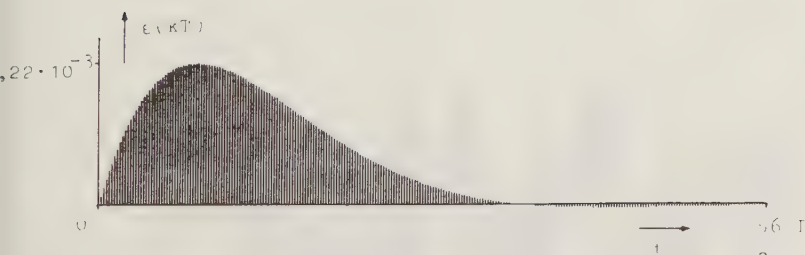
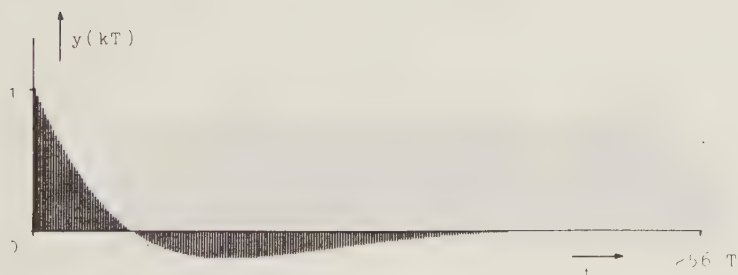


Bild 3.16c: Sprungantwort des Systems $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1.5s + 1}$
 $T = 0.029$

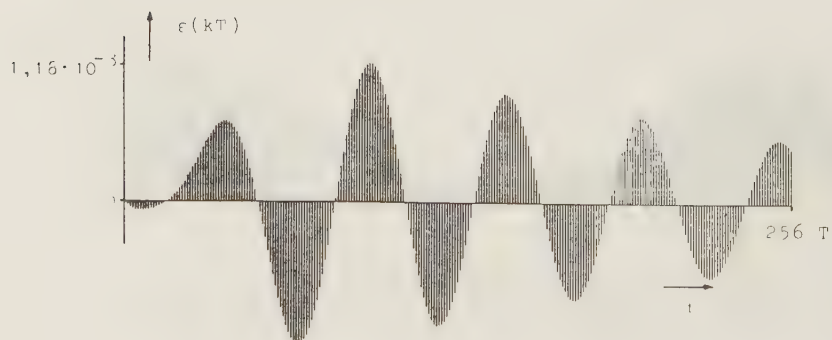
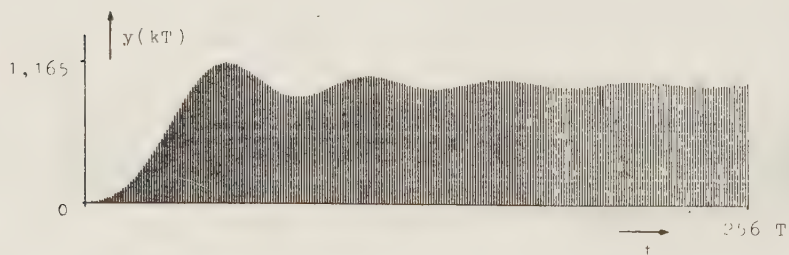
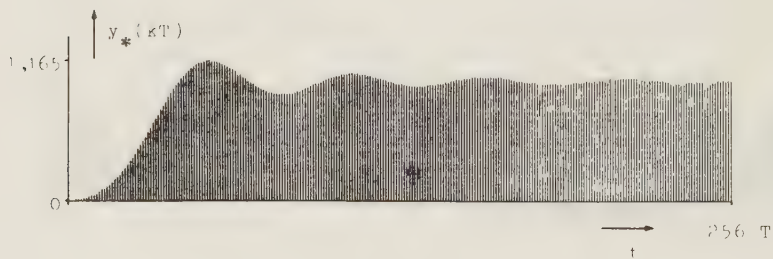


Bild 3.16d: Sprungantwort des Cauer-Tiefpasses C052545C
 $T = 0,117$

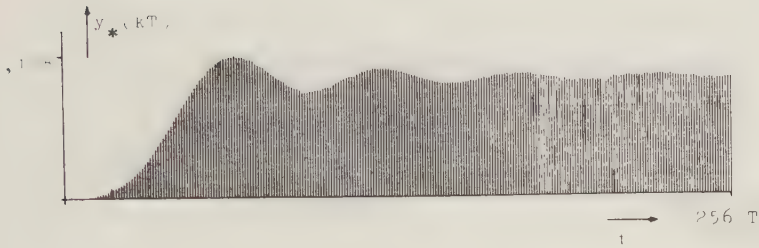


Bild 3.16e: Sprungantwort des Cauer-Tiefpasses C062545 C
 $T = 0,117$



Bild 3.16f: Sprungantwort eines Hochpasses, transformiert
aus T0525; $T = 0,029$

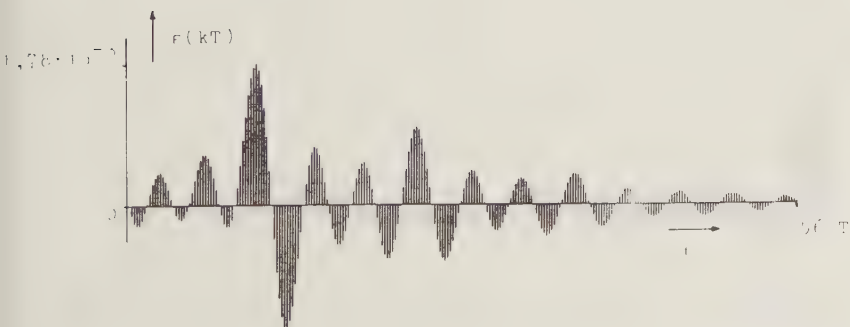


Bild 3.16g: Sprungantwort des Rechteckfilters 7.6:QR
 $T = 0,117$

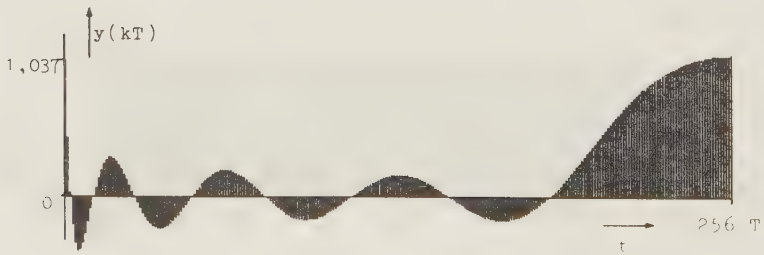
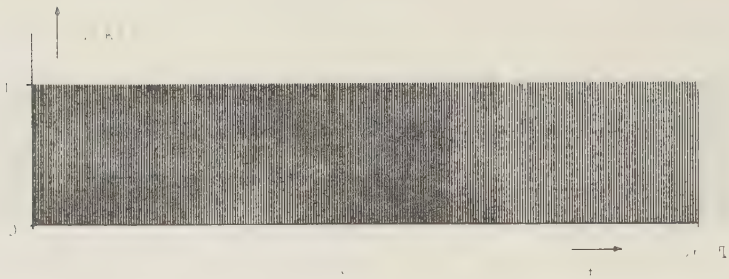


Bild 3.16h: Sprungantwort eines Bessel-Allpasses 8. Grades
 $T = 0,0095$

4. Vergleichende Gegenüberstellung der untersuchten Verfahren

4.1 Fehlerkriterien

Die untersuchten Simulationsverfahren sollen gemäß der Aufgabenstellung Abtastwerte der Ausgangszeitfunktion eines vorgegebenen kontinuierlichen Systems möglichst gut approximieren. Daher wurde als Fehler die Differenz zwischen den durch Transformation gewonnenen Ausgangssignalwerten und den Abtastwerten einer Modellausgangsfunktion gemessen. Das gewählte Vergleichsmodell ist in Abschn. 4.2 näher beschrieben.

Zum Vergleich der Verfahren wurde die Abhängigkeit des unten definierten normierten Maximalfehlers von der Rechenschrittweite T für verschiedene Systeme und Eingangsfunktionen in den Diagrammen von Abschn. 4.5 aufgetragen.

Der Maximalfehler ist wie in Abschn. 2.2.3.1 definiert:

$$\epsilon_{\max} = \frac{\text{Max}\{ |y(kT) - y_*(kT)| \}}{\text{Max}\{ |y(kT)| \}} \quad k = 0, \dots, R \quad (4.1)$$

mit $y(kT)$: Abtastwerte der Modellausgangsfunktion
 $y_*(kT)$: simulierte Ausgangssignalwerte
 $R \cdot T$: Rechenintervall

Weiterhin wurde der normierte mittlere quadratische Fehler

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{\sum_{v=0}^{R-1} (y(kT) - y_*(kT))^2}{R \cdot (\text{Max}\{ |y(kT)| \})^2} \quad (4.2)$$

gemessen und in Abhängigkeit von der Rechenschrittweite aufgetragen.

4.2 Vergleichsmodelle

Die Wahl eines geeigneten Vergleichsmodells ist für die Beurteilung der Güte eines Simulationsverfahrens von entscheidender Bedeutung. Das beste Modell hierfür wäre zweifellos das zu simulierende System selbst. Dafür würde sich z.B. eine On-line-Simulation nach Bild 4.1 mit dem Analogrechner als Vergleichsmodell anbieten.

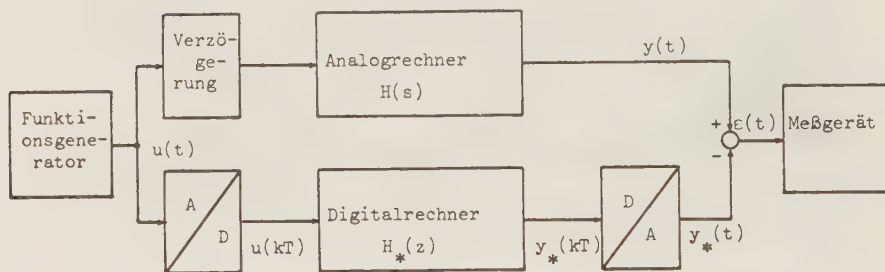


Bild 4.1: On-line-Simulation mit Hilfe des Analogrechners

Der Nachteil dieser Anordnung besteht darin, daß ein Vergleich allgemein mit hinreichender Genauigkeit nicht durchgeführt werden kann. Bei kleiner Rechenschrittweite arbeiten die meisten Verfahren genauer, als die in Bild 4.1 angegebene D/A-Wandlung des digitalen Ausgangssignals durchgeführt werden kann. Dies trifft für Othmer- und Parallelverfahren auch bei großen Rechenschrittweiten zu. Aber selbst wenn sich das Signal $y_*(t)$ mit gleicher Genauigkeit wie $y_*(kT)$ erzeugen ließe, ist eine Genauigkeitsangabe über $y(t)$ auch bei Kenntnis der Komponenten- und Genauigkeit des Analogrechners schwierig. Bei einer Koeffizientengenauigkeit von 10^{-4} ist $y(t)$ zumindest für die genannten Rechenschrittweiten nicht mehr zum Vergleich geeignet.

Dagegen läßt sich die Vergleichsfunktion zuverlässig mit Hilfe der Residuenrechnung gewinnen, die mit doppelter Genauigkeit durchgeführt wird. Normiert man die Ausgangssignalwerte auf 1, so erreicht man bei einer Mantissenlänge von 55 bit dabei eine

maximale Genauigkeit von ca. 10^{-16} . Man ist allerdings bei der Auswahl der Testfunktionen und Vergleichssysteme eingeschränkt. Wie aus [34] hervorgeht, sollen die Systeme nicht zu hochgradig sein und die Pole nicht zu eng liegen, damit die Residuenrechnung noch eine hinreichend genaue Lösung liefert.

4.3 Untersuchte Systeme

Da sich im allgemeinen Nachrichtenübertragungssysteme, die hier simuliert werden sollen, aus mehreren höhergradigen Teilfiltern zusammensetzen, wurde zum Test der Simulationsverfahren auf Systeme zweiten Grades verzichtet.

Das erste Test-System ist ein Cauer Tiefpaß 6. Grades, der unter der Bezeichnung CO62545c den Katalogen [30], [31] entnommen wurde. Das zweite System ist ein Filter, das für eine spezielle, rechteckförmige Impulsantwort entworfen wurde. Es wurde unter der Bezeichnung Rechteckfilter 7.6:QR von Meyer in [32] vorgestellt. Außerdem wurde noch ein System 87. Grades, eine Laufzeitkette mit Vorfilter, ausgewählt, für das allerdings die Residuenrechnung versagt und somit ein quantitativer Genauigkeitsvergleich nicht möglich war. Jedoch konnte ein qualitativer Vergleich mit der Ausgangsfunktion eines am Institut aufgebauten Systems dieser Art vorgenommen werden [33]. Die Laufzeitkette besteht aus einer Kaskade von 10 identischen Bessel-Allpässen 8. Grades für eine maximal flache Approximation der konstanten Laufzeit. Das Vorfilter ist das oben erwähnte Rechteckfilter 7.6:QR. Pole und Nullstellen sowie Schaltungen und Bauelemente der Systeme sind im Anhang zu finden.



Vorfilter

10 identische Bessel-Allpässe 8. Grades

Bild 4.2: Laufzeitkette mit Vorfilter

Die Forderungen des Vergleichsmodells Residuenrechnung aus Abschn. 4.2 werden von den Systemen Cauer T.P. und Rechteckfilter erfüllt.

4.4 Verwendete Eingangsfunktionen

Als Testfunktionen wurden Sprung- und Rechteckfunktion gewählt, da sie für Othmer und Parallelverfahren die Bedingung von Gl. (2.9) erfüllen, und somit als Fehler nur numerische Ungenauigkeiten auftreten können. Ferner wurde als Beispiel für allgemeine Eingangsfunktionen ein abklingender Kosinus herangezogen.

Das Gesamtrechnenintervall $R \cdot T$ wurde so gewählt, daß die charakteristischen Eigenschaften der jeweiligen Ausgangs- und Fehlerfunktion für die verschiedenen Verfahren erfaßt wurden. Die Länge dieses Rechenintervalls wurde dazu empirisch an Hand von Plotter-Ausdrucken ermittelt.

Aus Gründen der Programmorganisation wurde die Anzahl R der Abtastwerte zu 2^5 , 2^6 , ..., 2^9 festgelegt. Da sich die Rechenschrittweite T aus Rechenintervall und Zahl der Abtastwerte errechnet, ergaben sich dafür keine glatten Zahlenwerte. Aus der hinreichend feinen Abtastung der Kosinusfunktion ergab sich dafür auch keine glatte Zahl für das Gesamtrechnenintervall $R \cdot T$.

- Sprung:
$$u(t) = \delta_{-1}(t) \quad (4.3)$$

Gesamtrechnenintervall $R \cdot T = 30$

- Rechteck:
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \kappa T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.4)$$

Gesamtrechnenintervall $R \cdot T = 40$

$\kappa \cdot T$ wurde so gewählt, daß es gleich der Breite des von der Im-

pulsantwort des Filter 7.6:QR approximierten Rechtecks wurde.

- abklingender Kosinus:

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t/2} \cdot \cos 2\pi t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Gesamtrechnenintervall $R \cdot T = 7,68$

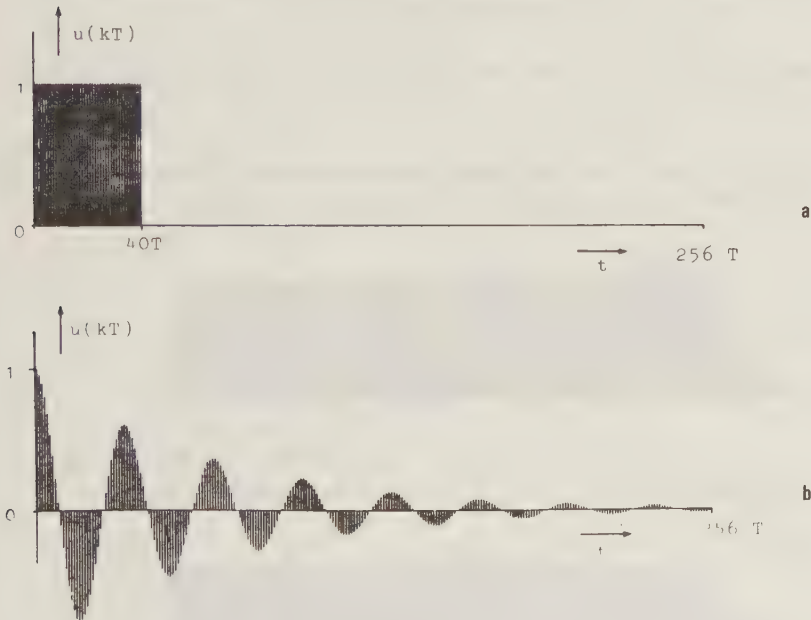


Bild 4.3: Eingangsfunktionen

- a) Rechteck, Gesamtrechnenintervall $256 \cdot T = 40$
- b) abklingender Kosinus, $256 \cdot T = 7,68$

4.5 Messung der Genauigkeit der Verfahren

4.5.1 Sprungantwort

Der zeitliche Verlauf der Sprungantwort von Cauer-Tiefpaß und Rechteckfilter ist - mit Hilfe der Residuenrechnung ermittelt - in Bild 4.5a bzw. 4.5b aufgetragen. Die Rechenschrittweite T ist dabei auf die Durchlaßfrequenz der beiden Filter normiert.

Mit den Dimensionen $[T] = \text{sec}$ und $[\omega_D] = \frac{1}{\text{sec}}$ erhält man
mit $\omega_D = 1 \text{ sec}^{-1}$

$$T_n = T \cdot f_D = T \cdot \frac{\omega_D}{2\pi} = \frac{T}{2\pi} \quad (4.6)$$

$$T_n = 0,01865 \text{ für Bild 4.5}$$

Die maximale normierte Abweichung der simulierten Ausgangsfunktion von der oben genannten Ausgangsfunktion ist über T_n aufgetragen und für den Cauer T.P. in Bild 4.6, für das Rechteckfilter in Bild 4.8 dargestellt.

Bild 4.7 und 4.9 zeigen den zugehörigen mittleren quadratischen Fehler nach Gl. (4.2).

Bild 4.10 zeigt den zeitlichen Verlauf einiger charakteristischer Fehler bei der Sprungantwort des Cauer-Tiefpasses.

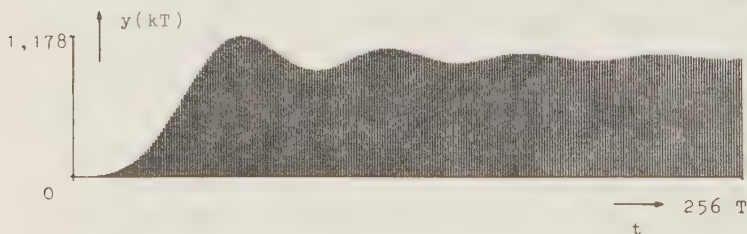


Bild 4.5a: Sprungantwort des Cauer-Tiefpasses



Bild 4.5b: Sprungantwort Rechteckfilter



Bild 4.6: Maximaler Fehler bei Sprungantwort des Cauer-Tiefpasses

- Bilinear
- - - Boxer/Thaler
- ... Gorille
- · - Matched-T-Transformation
- - - Tanner
- - - Boxer
- ... Boxer/Thaler
- ... Boxer/Thaler

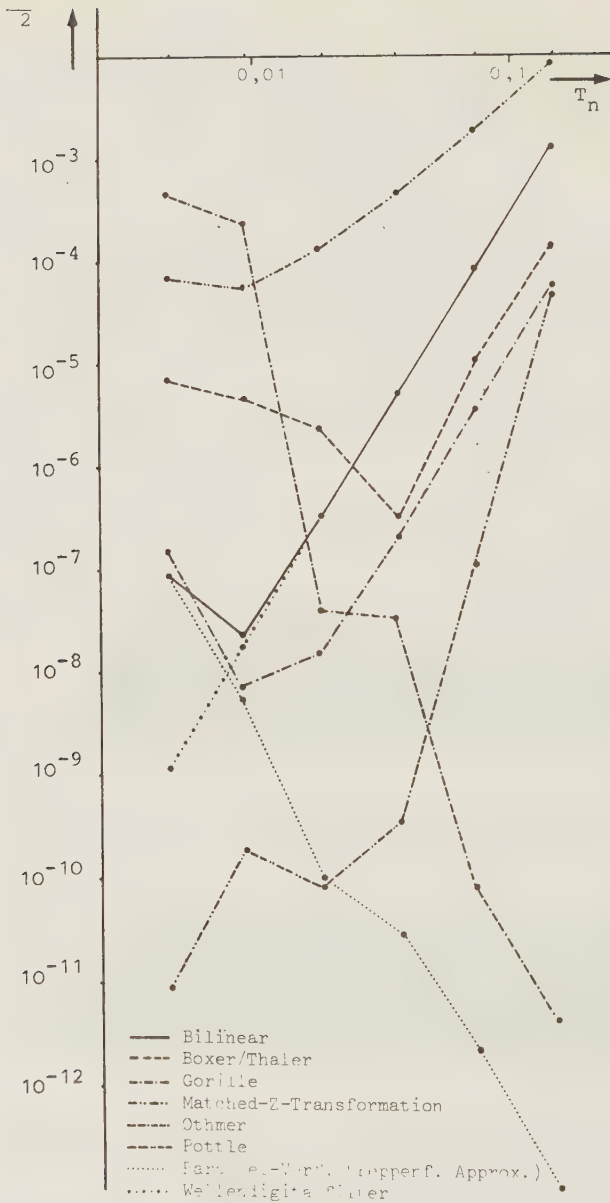
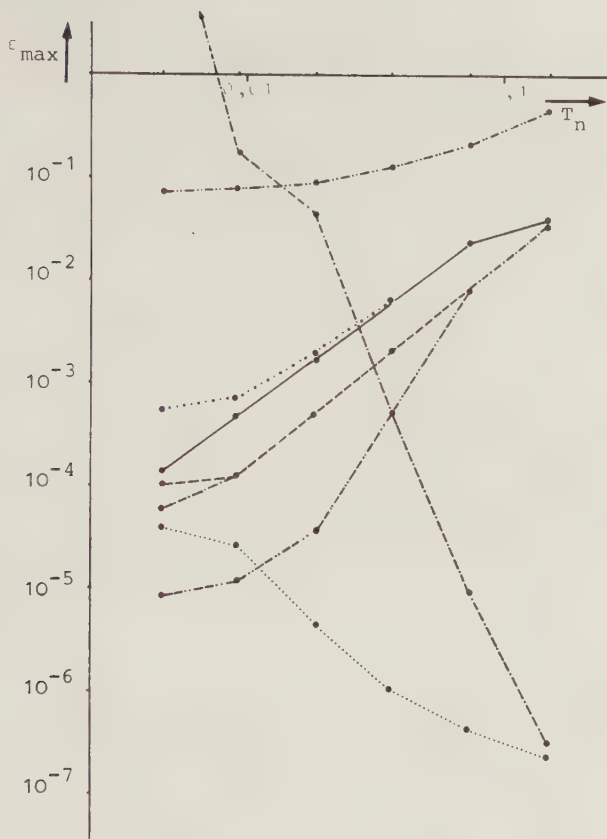


Bild 4.7: Mittlerer quadratischer Fehler bei Sprungantwort des Cauer-Tiefpasses



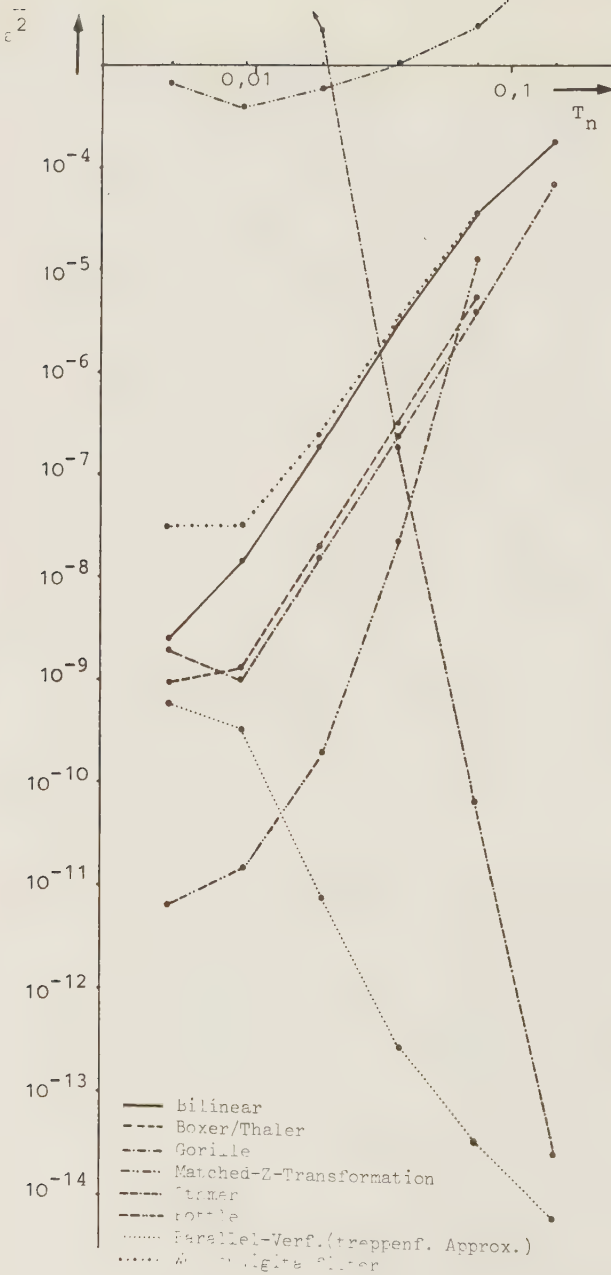


Bild 4.9: Mittlerer quadratischer Fehler bei Sprungantwort des Rechteckfilters 7.6:QR

Aus den Bildern 4.6 bis 4.9 lassen sich für einzelne Verfahren die folgenden Besonderheiten herauslesen:

- i Allgemein gilt für alle Verfahren, daß etwa bei $T_n < 0,01$ die numerischen Ungenauigkeiten so groß werden, daß die im doppelt logarithmischen Maßstab gezeichneten Fehlerkurven bei kleiner werdender Rechenschrittweite nicht mehr wie zu erwarten linear abfallen, sondern abflachen und teilweise sogar ansteigen.
- ii Die Matched-z-Transformation ist für Zeitbereichsbetrachtungen nicht geeignet.
- iii Der vorzeitige Anstieg des Fehlerverlaufs bei Boxer-Thaler-Transformation in Bild 4.6 (bzw. 4.7) resultiert aus der nur näherungsweisen Berechnung der Anfangswerte (vgl. Abschn. 2.4). Daher tritt der maximale Fehler gleich am Anfang des Einschwingvorganges auf (vgl. dazu den zeitl. Fehlerverlauf von Bild 4.10b).
- iv Das starke Anwachsen des Verlaufs des mittleren quadratischen Fehlers mit kleiner werdendem T beim Othmer-Verfahren resultiert aus der in Abschn. 2.2.4.2 erklärten bleibenden Abweichung.
- v Das stärkere Anwachsen des Fehlers in Bild 4.8 gegenüber Bild 4.6 beim Othmer Verfahren ist ebenfalls aus Abschn. 2.2.4.2 durch den geringeren Gradunterschied des Filters 7.6:QR gegenüber dem Cauer T.P. zu erklären.
- vi Da die bilineare Transformation in Kaskadenstruktur und in Wellendigitalfilterstruktur auf denselben Prinzipien beruhen, ergeben sich auch nahezu identische Fehlerverläufe. Die Abweichungen sind auf das gewählte Beispiel des Filter 7.6:QR zurückzuführen, für das die Wellendigitalfilterstruktur wegen der Eigenschaften im Durchlaßbereich numerische Schwierigkeiten bei kleinem T aufweist (vgl. z.B. 19|, S. 13).
- vii Beim Cauer-T.P. jedoch ist die Wellendigitalstruktur bei kleiner werdendem T besser als die bilineare Transformation. Hier zeigt sich der Vorteil dieser Struktur bei der numerischen Rechnung.

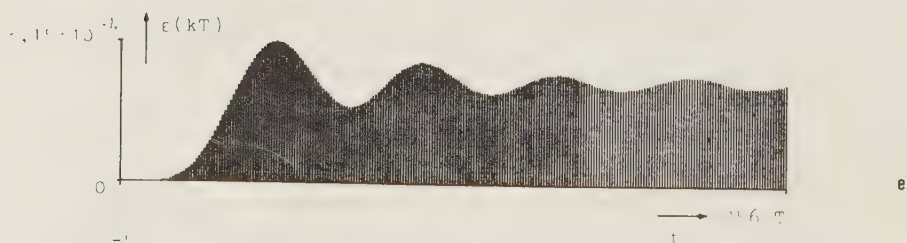
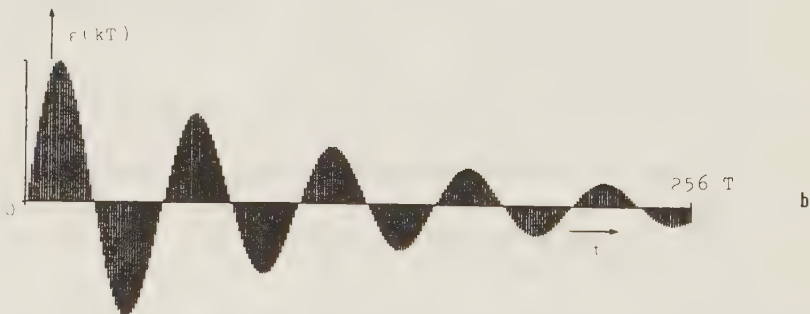
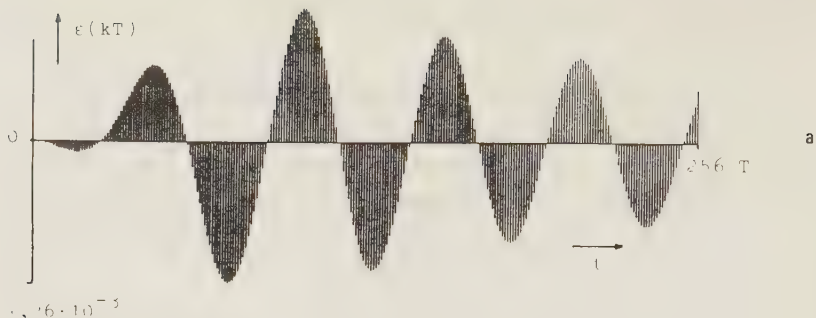


Bild 4.10: Charakteristische zeitliche Fehlerverläufe bei Sprungantwort des Cauer Tiefpasses; $T = 0,01865$.
 a) Bilineare Transformation, repräsentativ für die nicht angeführten Verfahren
 b) Boxer/Thaler Transformation
 e) Othmer - Verfahren
 g) Parallel - Verfahren

viii In der relativen Lage der Fehlerkurven der einzelnen Verfahren zueinander ist für $\epsilon_{\max}$ und ϵ^2 kein prinzipieller Unterschied festzustellen. Für eine Charakterisierung der Verfahren ist also der Verlauf von $\epsilon_{\max}$ ausreichend.

4.5.2 Rechteckantwort

Repräsentativ für Eingangsfunktionen mit Sprungstellen für $t > 0$ wurde die Rechteckantwort des in Abschn. 4.3 vorgestellten Filters 7.6:QR ermittelt. Bild 4.11 zeigt den zeitlichen Verlauf dieser Ausgangsfunktion, - gewonnen über die Residuenrechnung. Die Rechenschrittweite T ist wieder auf die Durchlaßfrequenz des Filters normiert nach Gl. (4.6). Sie hat für Bild 4.11 den Wert $T_n = 0,01583$.

In Bild 4.12 ist der Verlauf des maximalen normierten Fehlers über der Rechenschrittweite für die verschiedenen Verfahren aufgetragen.



Bild 4.11: Zeitlicher Verlauf der Rechteckantwort des Filters 7.6:QR

Der charakteristische zeitliche Verlauf des Fehlers ist in Bild 4.13 aufgetragen. Nach Abschn. 2.4 kann der Fehler Ähnlichkeiten mit der verschobenen Impulsantwort aufweisen. Beispielfhaft dafür steht der Fehlerverlauf bei bilinearer Transformation (Bild 4.13a). Daneben sind noch die Fehlerverläufe von Parallel- und Othmer-Verfahren aufgetragen, die diese Besonderheit nicht aufweisen (Bild 4.13e und 4.13g).

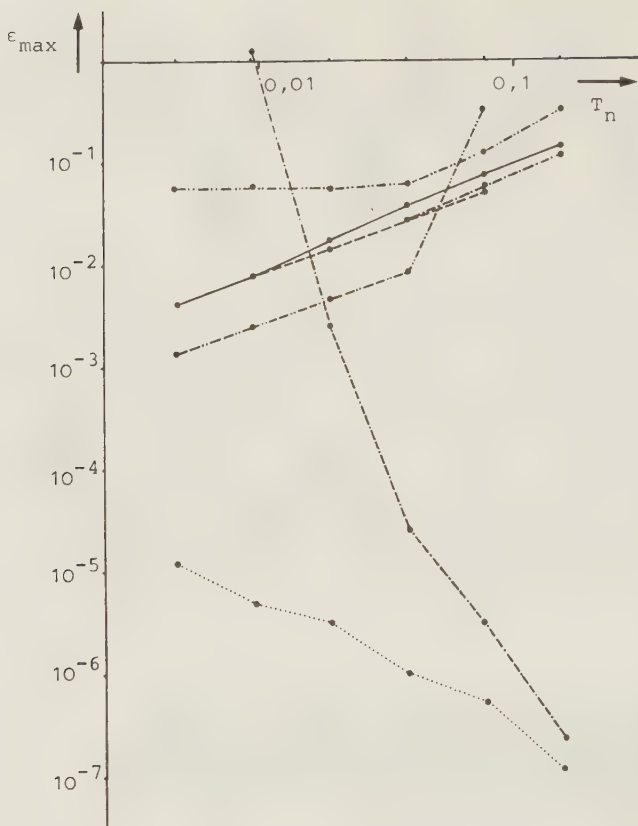


Bild 4.12: Maximaler Fehler bei Rechteckantwort des Filters 7.6:QR

- Bilinear, Weidenigitalfilter
- - - Euler/Thaler
- · - · - - Padé
- - - - - Taylor = fmax. Expansion
- · - · - - Taylor
- - - - - Padé
- · - · - - Padé (approxim. Approx.)
- - - - - Taylor (approx. Approx.)

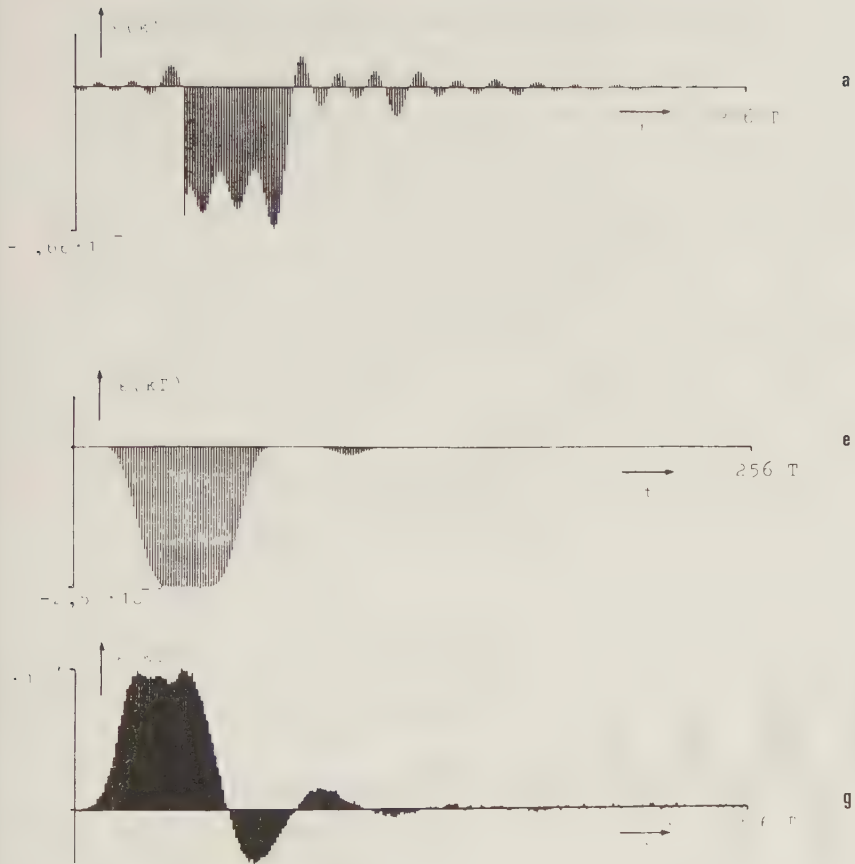


Bild 4.13: Zeitlicher Fehlerverlauf bei Rechteckantwort des Filters 7.6:QR

- a) Bilineare Transformation
- e) Othmer - Verfahren
- g) Parallel - Verfahren

4.5.3 Systemantwort auf abklingende Kosinusfunktion

In Bild 4.14 ist der zeitliche Verlauf der Ausgangsfunktion dargestellt, der sich für das Filter 7.6:QR ergibt, wenn mit einer abklingenden Kosinusfunktion nach Gl. (4.5) erregt wird.

Die Abtastbreite T_n ist auf $f_D + f_O$ normiert nach der Beziehung

$$T_n = T \cdot (f_O + f_D) = T \cdot \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right) \quad (4.7)$$

mit $f_D = \frac{1}{2\pi}$ Hz : Durchlaßfrequenz von 7.6:QR

$f_O = 1$ Hz : Frequenz des Kosinus

Die normierte Abtastbreite hat für Bild 4.14 den Wert

$$T_n = 0,03478$$

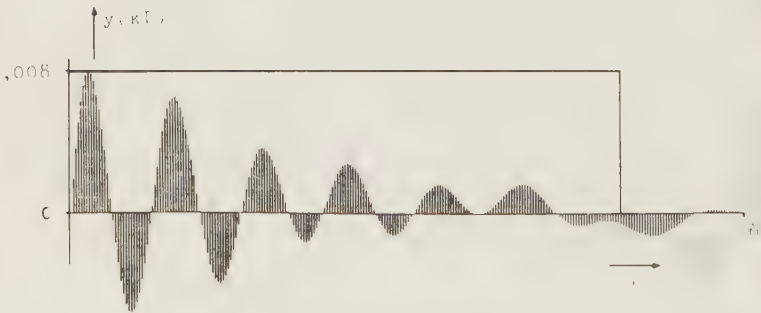


Bild 4.14: Zeitlicher Verlauf der Antwort des Systems 7.6:QR bei Erregung mit abklingender Kosinusfunktion
 T_O : Breite des durch die Impulsantwort des Filters approximierten Rechtecks.

In Bild 4.15 ist wieder die Abhängigkeit des maximalen Fehlers von der Rechenschrittweite aufgetragen. Da es sich hierbei um relativ große Abweichungen handelt, ist besonders für diese Eingangsfunktion auch der zeitliche Verlauf der simulierten Ausgangsfunktion interessant. Er ist für die verschiedenen Verfahren im Vergleich zur doppelt genau gerechneten Ausgangsfunktion

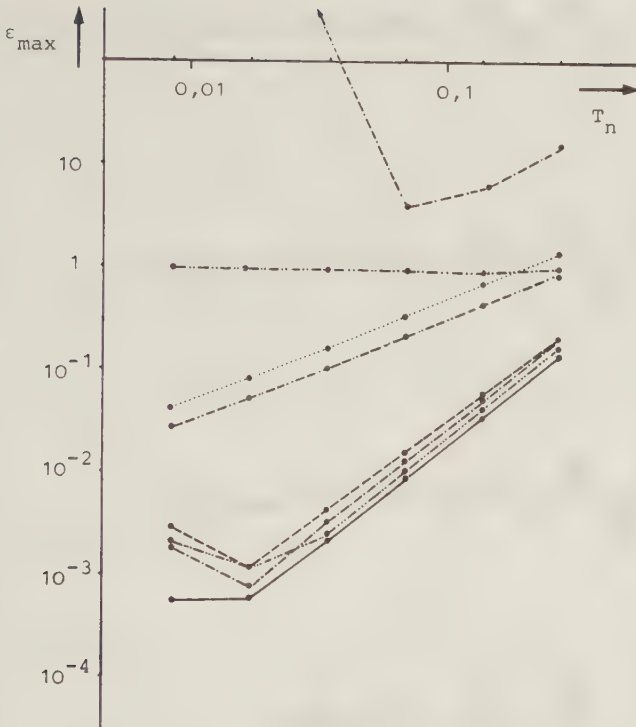


Bild 4.15: Maximaler Fehler bei Erregung des Filters 7.6:QR mit einem abklingenden Kosinus

- Bilinear, 2. Ordnungsgl. Filter
- Exner/Thaler
- Orville
- Gauss-Jordan-Transformation
- Filter
- Fritze
- Pers. 2. u. 3. Ord. (treppenf. Approx.)
- Pers. 2. u. 3. Ord. (lin. Interpolation)

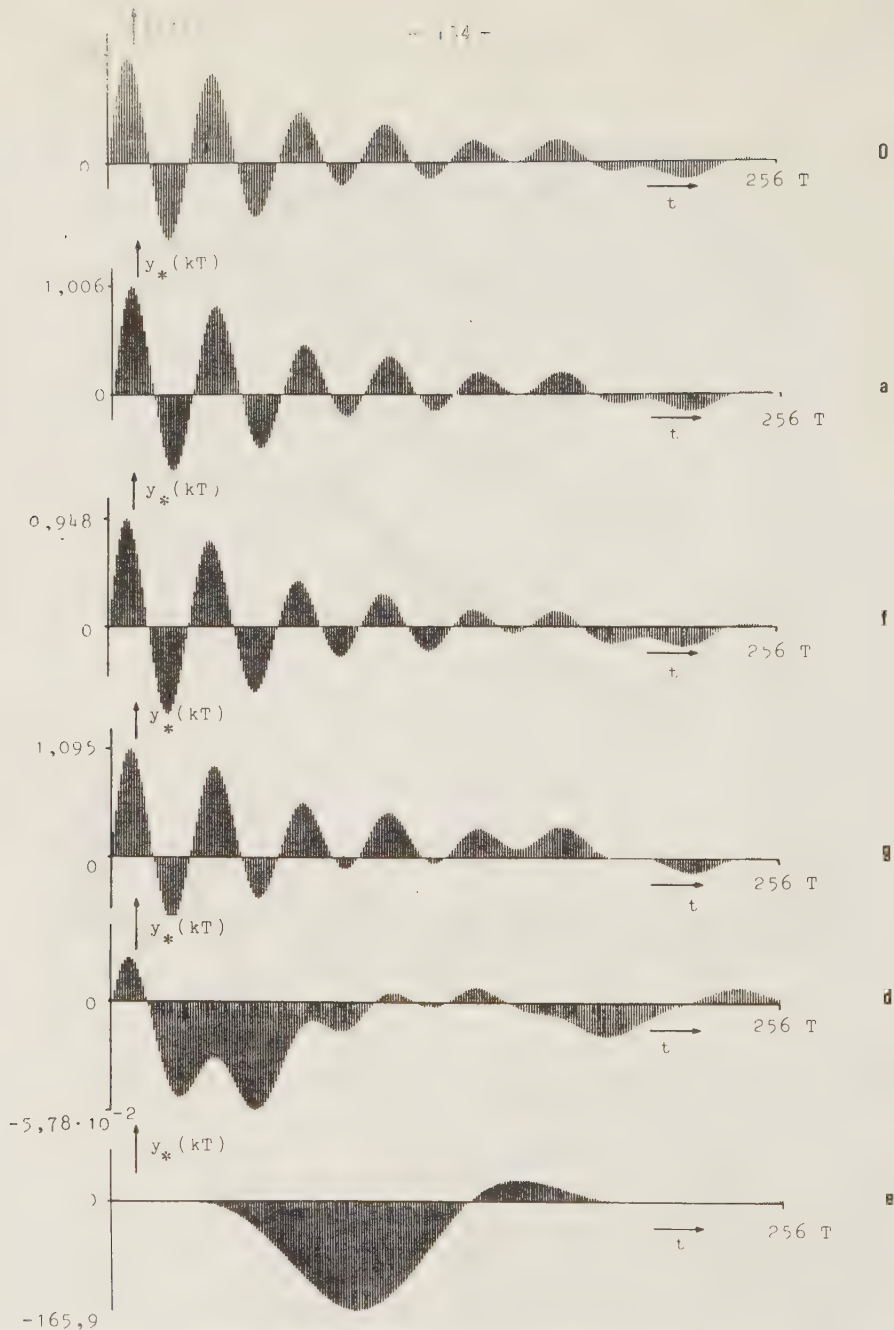


Bild 4.16: Zeitlicher Verlauf der Ausgangsfunktion bei Erregung mit abklingendem Kosinus. (Filter 7.6:QR) $T_n = 0,03478$

- 0) Vergleichswerte
- a) Bilineare Transformation
- f) Transformation nach Pottle
- g) Parallel - Verfahren
- d) Matched-Z-Transformation
- e) Othmer Verfahren

mittels Residuenrechnung in Bild 4.16 aufgetragen.

Aus Bild 4.16 geht hervor, daß die Matched-z-Transformation und das Othmer-Verfahren für diese Eingangsfunktion als Simulationsverfahren nicht in Frage kommen. Ebenso ist beim Pottle-Verfahren und beim Parallelverfahren mit treppenförmiger Approximation eine Abweichung der Form der Ausgangsfunktion von der in Bild 4.16 O) dargestellten Vergleichsfunktion noch deutlich zu erkennen. Erst die restlichen Verfahren, repräsentiert durch die bilineare Transformation, liefern Ausgangssignalwerte, die in der dargestellten Form mit dem Auge nicht mehr von den Vergleichswerten unterschieden werden können.

4.5.4 Rechenzeit

Speziell für die Optimierung von Systemparametern ist die benötigte Rechenzeit der verschiedenen Simulationsverfahren von großem Interesse. Es wurde die Zeit, die benötigt wird, eine vorgegebene Eingangsfolge von R Abtastwerten in eine Ausgangssignalfolge von ebenfalls R Werten zu überführen, gemessen und in Bild 4.17 dargestellt.

Es ergibt sich zwangsläufig eine Übereinstimmung der Rechenzeit für die Verfahren, die mit der Kaskadenstruktur arbeiten und deren Teilsysteme dieselbe Struktur wie in Bild 2.1 haben. Andere Rechenzeiten können daher nur noch Pottle-Verfahren, Parallel-Verfahren und Wellendigitalfilter-Struktur haben.

Bild 4.17 zeigt beispielhaft für das Rechteckfilter 7.6:QR die Rechenzeit aufgetragen über der Rechenschrittweite. Dabei war es für die Messung ohne Belang, welche Eingangsfunktion gewählt wurde.

Im übrigen ist die Rechenzeit abhängig vom Systemgrad und der Anzahl der Abtastwerte und nicht zuletzt von der Bauart des Rechenwerks der Maschine. Bild 4.17 zeigt die Rechenzeiten

für ein festes Gesamtrechnenintervall (d.h. Verdopplung der Abtastwerte bei Halbierung der Rechenschrittweite).

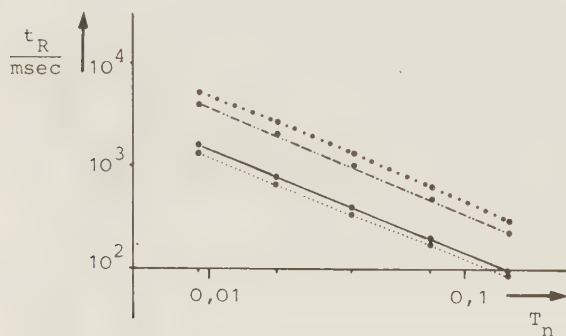


Bild 4.17: Rechenzeit über T_n beim Filter 7.6:QR

- Parallel-Verfahren (treppenf. Int.)
- Pottle-Verfahren
- Wellendigitalfilter-Struktur
- alle anderen Verfahren mit Kaskadenstruktur

4.5.5 Produkt aus Rechenzeit und Fehler als Gütemaß

Bei konsistenten Simulationsverfahren nimmt der Fehler mit kleiner werdender Rechenschrittweite ab. Dabei erhöht sich jedoch wegen der größeren Anzahl der Abtastwerte die Rechenzeit. Die Güte eines Verfahrens läßt sich demnach daran messen, ob es bei gleicher Rechenzeit genauer ist als ein anderes, oder - entsprechend - bei gleicher Genauigkeit eine kürzere Rechenzeit benötigt. Damit kann man als Gütemaß für die verschiedenen Simulationsverfahren das Produkt aus Rechenzeit und Fehler ansetzen. In den Bildern 4.18a,...,4.18c) ist dieses Gütemaß über der Rechenschrittweite für die drei betrachteten Eingangsfunktionen und das Filter 7.6:QR aufgetragen. Es ist:

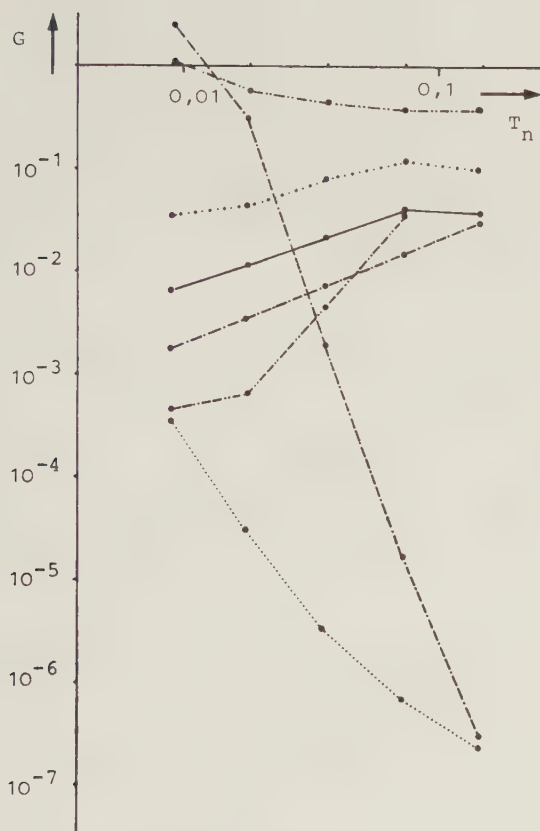


Bild 4.18a: Produkt aus Rechenzeit und Fehler
bei Sprungantwort des Filters 7.6:QR

- Bilinear
- - - Gorille, Boxer/Thaler
- · - Matched-Z-Transformation
- - - Othmer
- - - Pottle
- Parallel-Verf. (treppenf. Approx.)
- Wellendigitalfilter

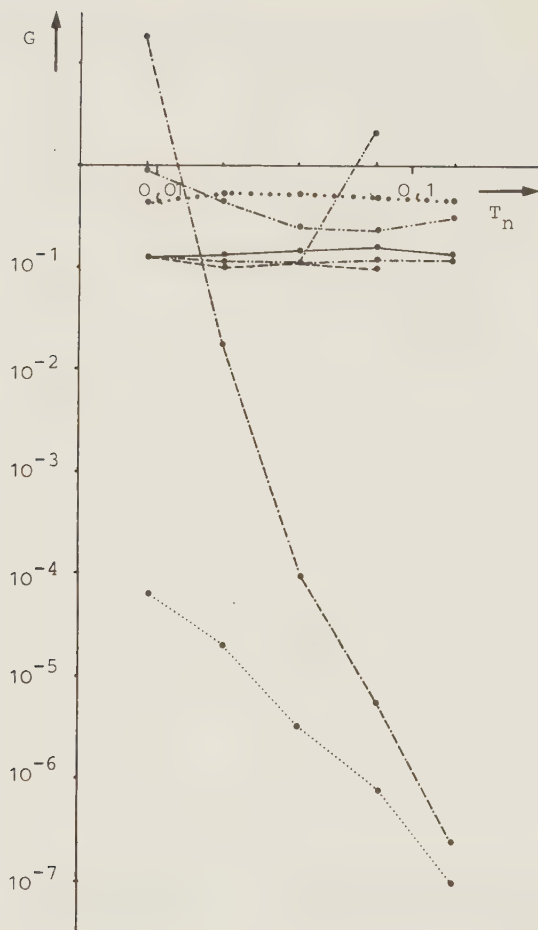


Bild 4.18b: Produkt aus Rechenzeit und Fehler
bei Rechteckantwort des Filters 7.6:QR

- Bilinear
- - - Boxer/Thaler
- · - Gorille
- · · Matched-Z-Transformation
- · · Othmer
- · · Pottle
- · · Parallel-Verf.(treppenf. Approx.)
- · · Wellendigitalfilter

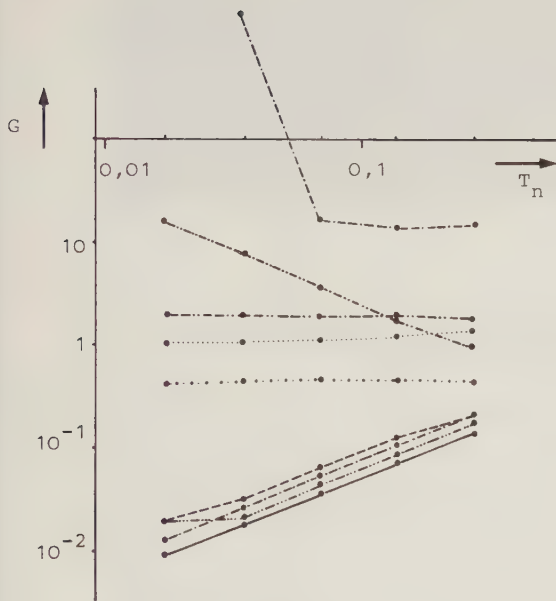


Bild 4.18c: Produkt aus Rechenzeit und Fehler
bei Erregung des Filters 7.6 QR mit
abklingendem Kosinus

- Bilinear
- - - Boxer/Thaler
- · - · - · Profile
- · - · - · Warped-T-Transformation
- · - · - · Ordnung
- · - · - · Faltung
- · · · · Parallel-Verf. (treppenf. Approx.)
- · - · - · Parallel-Verf. (lin. Interpolation)
- · · · · Wellendigitalfilter

$$G = t_{R_n} \cdot \epsilon_{\max} \quad (4.8)$$

$$t_{R_n} = \frac{t_R}{100 \text{ msec}} ; \epsilon_{\max} : \text{normierter Maximalfehler nach Gl. (4.1).}$$

Anmerkung: Je kleiner G, desto besser das Verfahren!

4.5.6 Vergleich der Ausgangsfunktion der einzelnen Verfahren bei einem System 87. Grades

Die in 4.3 vorgestellte Laufzeitkette mit Vorfilter besteht aus 10 gleichartigen Allpässen 8. Grades und dem Rechteckfilter 7.6:QR als Vorfilter. Die dabei auftretenden mehrfachen Pole der gesamten Übertragungsfunktion erlauben nicht die Anwendung des Parallelverfahrens (vgl. Abschn. 2.3.3). Ebenso konnte das Othmer-Verfahren nicht mehr verwendet werden, da die numerischen Ungenauigkeiten bei der Transformation auch bei großen Rechenschrittweiten zu keinen vernünftigen Ergebnissen führten. Da auch die Residuenrechnung für dieses System wegen des hohen Grades versagt (vgl. [34]), kann nur eine qualitative Beurteilung der Ausgangsfunktionen bei den verschiedenen Transformationsverfahren erfolgen.

Zum Vergleich dient ein Oszillogramm der Ausgangsfunktion des aufgebauten Filters bei Rechteckerregung (Bild 4.20). Daten des Versuchsaufbaus nach Bild 4.19:

Rechtecklänge des Vorfilters 7.6:QR :	100 µsec
Verzögerungszeit eines Allpasses	
8. Grades :	100 µsec
Länge des Eingangsrechtecks :	100 µsec

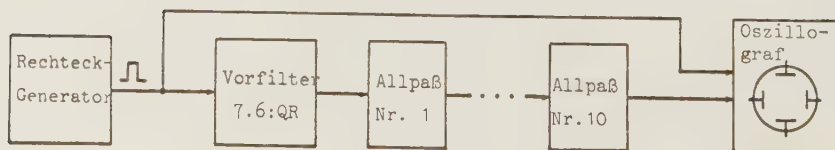


Bild 4.19: Versuchsanordnung zur Messung der Rechteckantwort am aufgebauten analogen Filter

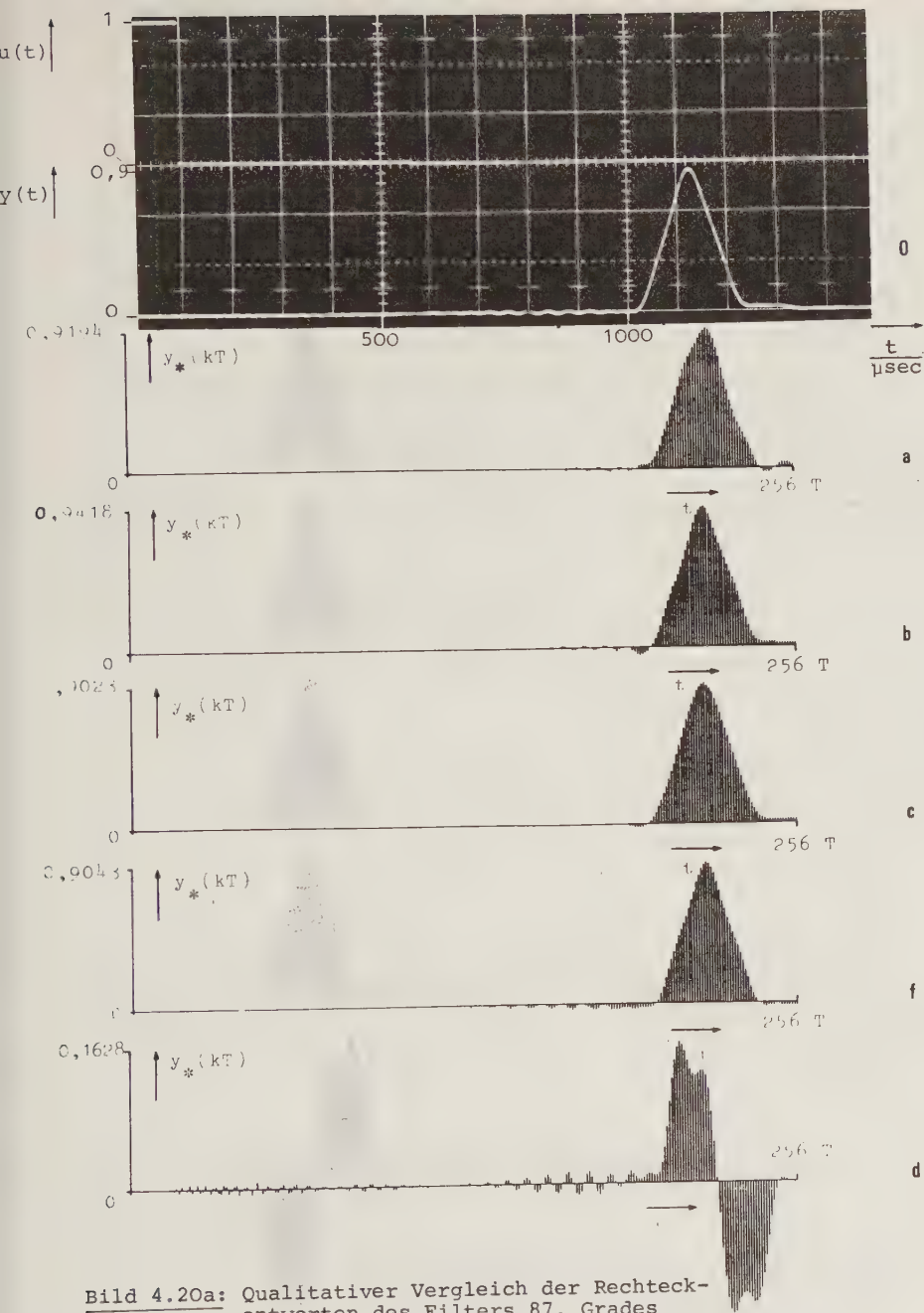


Bild 4.20a: Qualitativer Vergleich der Rechteckantworten des Filters 87. Grades
 Abtastintervall $T = 0,1$
 0) Oszillogramm des realen Filters
 a) bilinear $\hat{=}$ Wellendigitalfilter
 b) Boxer/Thaler
 c) Gorille
 f) Pottle
 d) Matched-z-Transformation

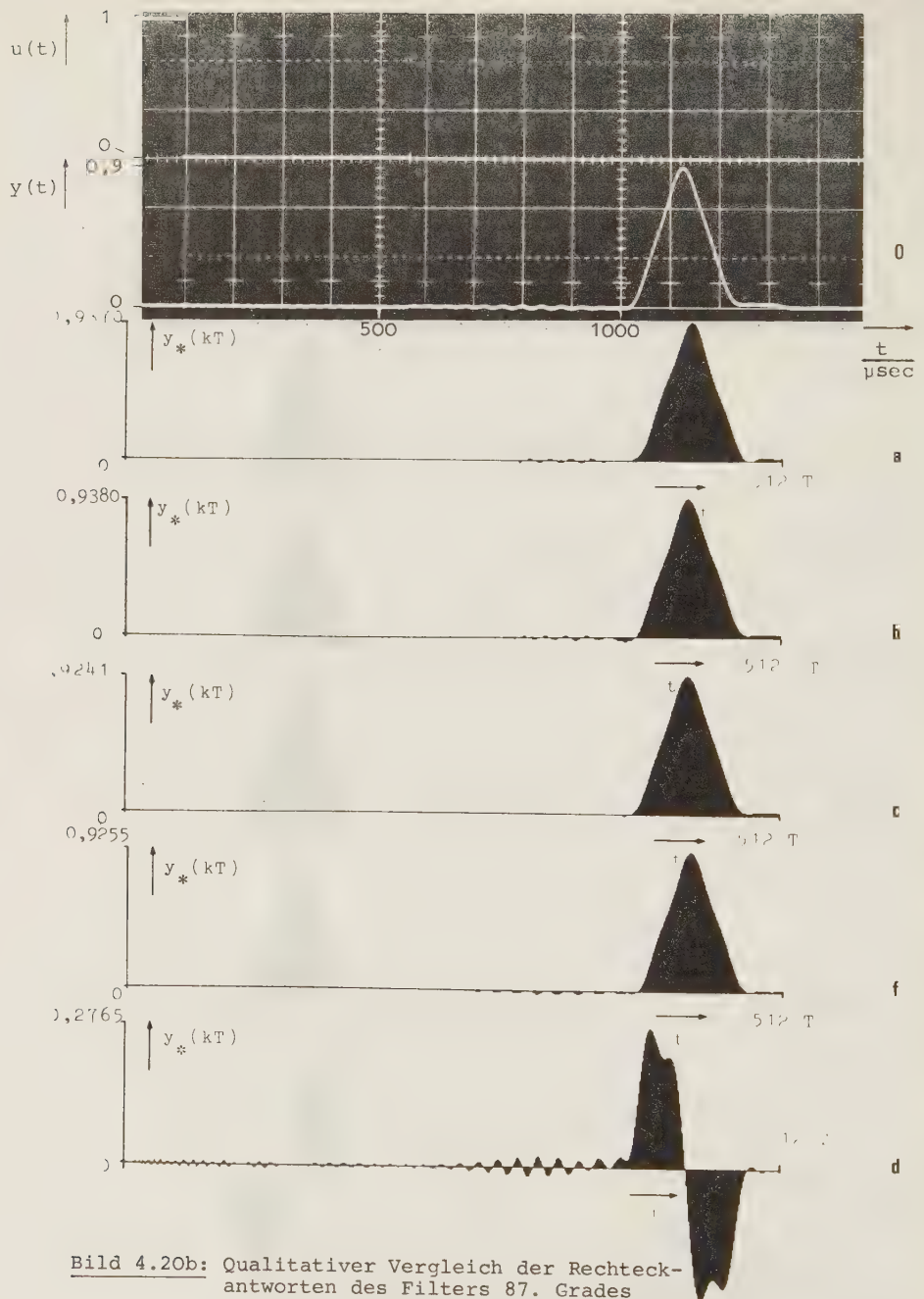


Bild 4.20b: Qualitativer Vergleich der Rechteck-
 antworten des Filters 87. Grades
 Abtastintervall $T = 0,05$
 O) Oszillogramm des realen Filters
 a) bilinear $\hat{=}$ Wellendigitalfilter
 b) Boxer/Thaler
 c) Gorille
 f) Pottle
 d) Matched-z-Transformation

4.6 Wahl eines Verfahrens bei vorgegebener Problemstellung

Zur Wahl eines Verfahrens wurde aus den Meßergebnissen eine tabellarische Übersicht über alle betrachteten Verfahren erstellt, die die unterschiedliche Brauchbarkeit der einzelnen Verfahren für bestimmte Aufgaben zusammenfaßt.

Die Tabelle 4.1 erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sie soll lediglich ein Anhaltspunkt sein, welches Verfahren für die eigene Problemstellung am ehesten in Frage kommt.

Die Beurteilung der Verfahren wurde nach den folgenden Gesichtspunkten aufgeschlüsselt:

- Schnelligkeit des Verfahrens
- Genauigkeit bei verschiedenen Eingangsfunktionen
- Systemeigenschaften

Darstellung des Systems durch $H(s)$ oder Abzweigstruktur

Hochgradiges System

Mehrfache Pole

Als Gütemaß wurde ein Punktesystem mit folgender Bedeutung gewählt:

- ++ sehr gut
- + gut
- o neutral
- schlecht
- nicht zu verwenden

V e r f a h r e n	Schnelligkeit	Genauigkeit bei Erregung mit			Systemeigenschaften			
		Sprung	Rechteck	Kosinus	H(s)	Abzweigstruktur	Hochgradiges System	Mehrfachpole
Bilinear	+	o	-	+	o	--	+	+
Boxer/Thaler	+	o	-	+	o	--	+	+
Gorille	+	o	-	+	o	--	+	+
Matched-Z-Transf.	+	-	-	--	o	--	--	o
Othmer	+	*)	*)	--	o	--	--	o
Pottle	-	+	-	-	o	--	+	+
Parallel, treppenf.	++	+	++	-	o	--	--	--
Parallel, lin.Int.	+	o	--	+	o	--	--	--
Wellendigital	-	o	-	+	--	o	+	+

*) bei großer Rechenschrittweite

Tabelle 4.1: Übersicht über die Brauchbarkeit der getesteten Verfahren

5. Simulation mit Hilfe des digitalen Filters

Bei einer Simulation am Digitalrechner können Signale im allgemeinen nur innerhalb eines endlichen Gesamtrechnintervalls verarbeitet werden. Für spezielle Anwendungen ist es jedoch wünschenswert, auch eine Echtzeitsimulation mit einer praktisch unendlich langen Eingangsfunktion durchführen zu können. Prinzipiell besteht am Laborrechner des Instituts die Möglichkeit eines Echtzeitbetriebs über ein A/D-D/A-Wandler-Interface, jedoch bei relativ geringer Verarbeitungsgeschwindigkeit. Besser eignet sich dafür ein einstellbares rekursives digitales Filter, das in Hardware-Realisierung am Institut vorhanden ist.

Zur Simulation muß mit Hilfe eines Transformationsprogrammes am Digitalrechner ein Koeffizientensatz von $H_*(z)$ für eine vorher festgelegte Abtastbreite T ermittelt werden. Diese Koeffizienten werden anschließend über Lochstreifen in das digitale Filter eingelesen. Danach kann der Filtervorgang im Echtzeitbetrieb erfolgen.

Zum Test dieser On-line-Simulation wurde die Verarbeitung einer für die Datenübertragung interessanten pseudo-zufälligen 0,1-Folge untersucht. Dabei wurde - wieder beispielhaft - der in Abschnitt 4.3 beschriebene Cauer-T.P. 6. Grades bilinear, nach Gorille und nach dem Parallelverfahren transformiert. Die Koeffizientensätze wurden jeweils für drei verschiedene Abtastbreiten errechnet und in das wahlweise in Kaskaden- oder Parallelstruktur arbeitende digitale Filter eingelesen.

Die digitalen Ausgangssignalwerte wurden mit dem Signal verglichen, das der am Analogrechner programmierte Cauer-T.P. bei gleicher Erregung lieferte. Dabei war zu berücksichtigen, daß die Genauigkeit des analogen Vergleichssignals nicht unter der Genauigkeit des simulierten Ausgangssignals lag (vgl. Abschn. 4.2). Daher wurden Abtastintervall T bzw. Abtastfrequenz $f_T = \frac{1}{T}$ entsprechend den Untersuchungen von Abschn. 4.5 so gewählt, daß das analoge Signal für einen Vergleich hinreichend genau war.

Mit dieser Einschränkung der Genauigkeit ist der Analogrechner speziell für rauschartige Signalquellen (z.B. pseudo-zufällige 0,1-Folgen) der im Digitalrechner durchgeführten Residuenrechnung als Vergleichsmodell durch den erheblich geringeren Rechenzeitaufwand überlegen; - insbesondere bei echten Rauschquellen, bei der eine Berechnung des Ausgangssignals über Residuenrechnung nicht mehr möglich ist.

Bild 5.1 zeigt den Meßaufbau der Echtzeitsimulation. Zur Messung wurden die am Institut entwickelten digitalen Meßgeräte und Funktionsgeneratoren verwendet.

Als zentraler Frequenzgenerator diente eine langzeitstabile Frequenzdekade. Damit wurden zwei Rechteckgeneratoren getriggert, die die gewünschten Abtastfrequenzen lieferten. Der Rechteckgenerator, der den Taktgenerator 1 steuerte, wurde wahlweise auf die Abtastfrequenzen 1.066 kHz, 2.133 kHz und 4.266 kHz eingestellt, die den jeweiligen Abtastintervallen T der im Digitalrechner ermittelten Filterkoeffizientensätzen entsprachen. Über einen Frequenzteiler wurde erreicht, daß der Taktgenerator 2 für alle drei Abtastfrequenzen mit einer konstanten Frequenz von 533 Hz den digitalen Rauschgenerator bzw. Datensender steuerte. Damit konnte der Rauschgenerator bzw. Datensender synchron zur jeweiligen Abtastfrequenz Signale liefern, die den Abtastwerten einer analogen Rechteckfolge bei unterschiedlicher Abtastbreite entsprachen.

Diese Signale wurden nach einer digitalen Verstärkung vom digitalen Filter direkt und von Analogrechner nach D/A-Wandlung verarbeitet. Nach A/D-Wandlung des analogen Ausgangssignals konnte ein Vergleich mit dem Ausgangssignal $y_*(kT)$ (siehe Bild 5.1) digital vorgenommen werden.

Der in Bild 5.1 angeführte digitale Datensender wurde speziell zur Erzeugung stehender Bilder am Oszillografen herangezogen, da man an ihm die Periodenlänge der Pseudozufallsfolge einstellen kann (vgl. Bild 5.2). Der digitale Funktionsgenerator wurde zur Amplitudenjustierung der Signale herangezogen, sowie zu qualitativen Vergleichen am Oszillografen bei Sinus- oder Sprung-

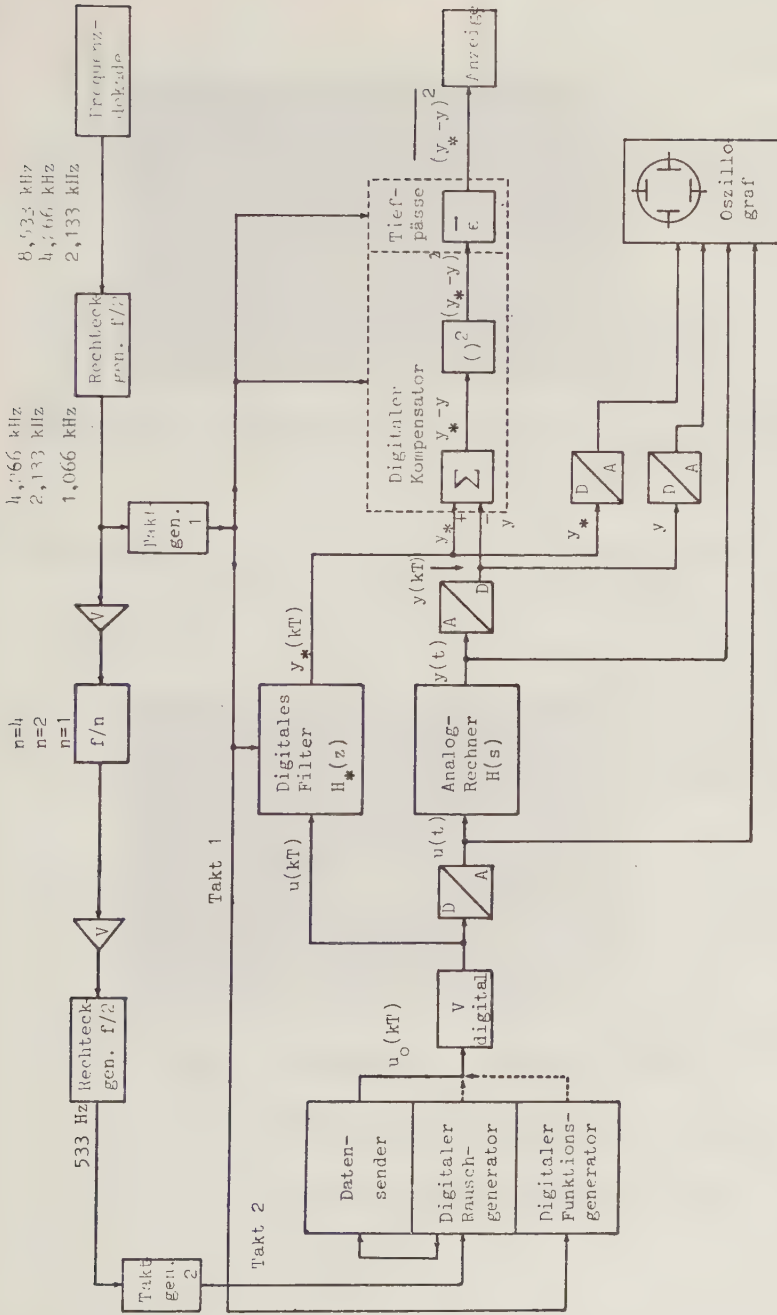


Bild 5.1: Messaufbau für Simulation mit Hilfe des digitalen Filters

erregung.

In Bild 5.2 sind zwei Oszillogramme dargestellt bei einer Periodenlänge der 0,1-Folge von 15. Transformiert wurde der Cauer-T.P. hier nach dem Parallelverfahren bei einer Abtastbreite von 0,2343 msec.

In Bild 5.2a sind Eingangssignal, Ausgangssignal nach dem Analogrechner, A/D-gewandeltes Analogrechnersignal und Ausgangssignal des digitalen Filters dargestellt; - wobei die beiden letzteren Signale zur Oszillografendarstellung erneut D/A gewandelt wurden (siehe Bild 5.1). In Bild 5.2b ist neben Eingangs-, A/D-gewandeltem Analogsignal und simuliertem Signal auch die Abweichung der Signale $y_*(kT) - y(kT)$ dargestellt.

Die quantitative Messung wurde mit Hilfe der digitalen Meßgeräte durchgeführt. Dabei konnte der mittlere quadratische Fehler $(y_*(kT) - y(kT))^2$ an einem Anzeigegerät abgelesen werden. Für die Messung wurde ein pseudozufälliges 0,1-Signal aus dem digitalen Rauschgenerator genommen, dessen Periodenlänge so hoch ist, daß das Signal praktisch einer echten Zufallsfolge entspricht. In Bild 5.3 sind die Ergebnisse für die drei Simulationsverfahren bei Erregung des Cauer Tiefpasses mit der 0,1-Folge aufgetragen.

Es ist

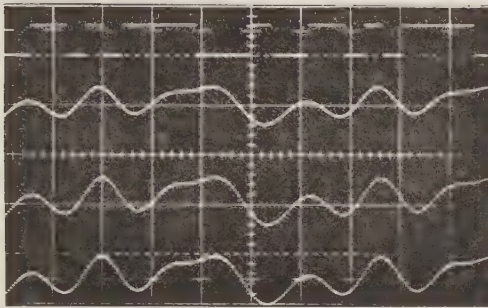
$$\overline{\epsilon^2} = \frac{\overline{u_\epsilon^2}}{u_{amax}^2}$$

wobei $\overline{u_\epsilon^2}$: abgelesener gemittelter Fehler in Volt²
 u_{amax} : maximale Ausgangsspannung in Volt.

Die Abtastbreite ist in msec aufgetragen.

Die Grenzfrequenz des analogen Cauer-Tiefpasses ist

$$f_D = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^3 \text{ Hz} = 159,15 \text{ Hz}$$



$u(t)$ 0,5 V/Skt.

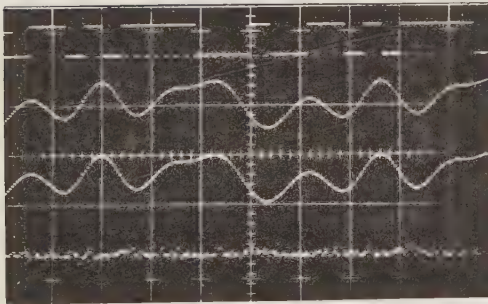
$y(t)$ 0,5 V/Skt.

$y(kT)$ 2 V/Skt.

$y_*(kT)$ 2 V/Skt.

Bild 5.2 a: Zeitlicher Verlauf der Signale $u(t)$, $y(t)$, $y(kT)$ und $y_*(kT)$ bei Transformation des Cauer Tiefpasses nach dem Parallelverfahren.

Abtastintervall $T = 0,2343$ msec
Horizontalablenkung: 5 msec/Skt.



$u(t)$ 0,5 V/Skt.

$y(kT)$ 2 V/Skt.

$y_*(kT)$ 2 V/Skt.

$\epsilon(kT)$ 0,1 V/Skt.

Bild 5.2 b: Zeitlicher Verlauf der Signale $u(t)$, $y(kT)$, $y_*(kT)$ und $\epsilon(kT) = y_*(kT) - y(kT)$ bei Transformation* des Cauer Tiefpasses nach dem Parallelverfahren.

Abtastintervall $T = 0,2343$ msec
Horizontalablenkung: 5 msec/Skt.

Es wurden maximal 4 Stellen nach dem Komma angezeigt.

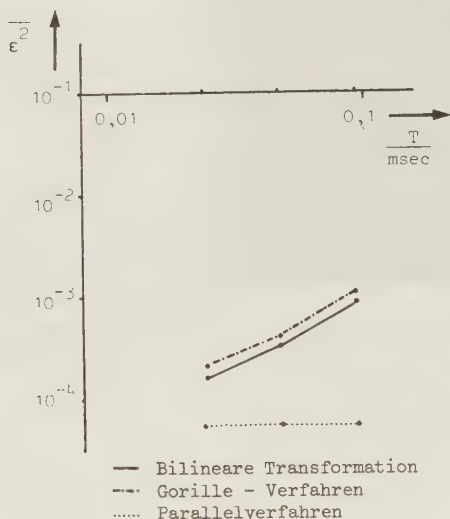


Bild 5.3: Mittlerer quadratischer Fehler bei Erregung des Cauer-T.P. mit pseudo-zufälliger 0,1-Folge

Vergleicht man die Ergebnisse von Bild 5.3 mit den Ergebnissen von Abschn. 4.5.1 Bild 4.7, so ergibt sich für die Echtzeitsimulation ein schlechteres Ergebnis bei bilinearer und Gorille Transformation. Es rührt im wesentlichen daher, daß am digitalen Filter keine Anfangswerte eingestellt werden können und auch Fehler, die an den Sprungstellen der Eingangsfunktion am Ausgang auftreten, nicht durch Zusetzen von Anfangswerten kompensiert werden können, wie es in Abschn. 2.4 beschrieben ist (vgl. dazu die Bilder 2.19 und 2.20). Da beim Parallelverfahren keine Anfangswerte benötigt werden (vgl. Abschn. 2.4) und die Eingangsfunktion die in Abschn. 2.3 geforderten Eigenschaften aufweist, stimmt die simulierte Ausgangsfunktion mit der vom Analogrechner gelieferten Vergleichsfunktion im Rahmen der Meßgenauigkeit exakt überein.

6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden Verfahren untersucht, die lineare, zeitinvariante Systeme am Digitalrechner im Zeitbereich simulieren. Es wurden verschiedene Systeme der jeweiligen Transformationsmethode unterworfen und für unterschiedliche Eingangsfunktionen die Abweichung der Ausgangssignalfolge von einem Modellausgangssignal gemessen. Die Fehlerverläufe der einzelnen Verfahren über der Rechenschrittweite wurden einander vergleichend gegenübergestellt. Unter Berücksichtigung der benötigten Rechenzeit wurde als Gütekriterium das Produkt aus Rechenzeit und Fehler angesetzt.

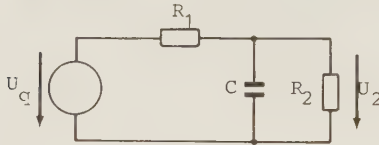
In einem weiteren Punkt wurde die Möglichkeit aufgezeigt, zur Untersuchung von Rauschsignalen eine Echtzeitsimulation mit Hilfe des digitalen Filters durchzuführen.

In einer Tabelle sind die wesentlichen Vor- und Nachteile der verschiedenen Verfahren zusammengestellt, die sich aus den Messungen ergaben. Dabei zeigt sich, daß ein optimales Verfahren für alle Anwendungsfälle nicht gefunden werden kann. Vielmehr bringt in Abhängigkeit von der Aufgabenstellung jeweils ein Verfahren Vorteile gegenüber den anderen.

7. A n h a n g

Zusammenstellung der untersuchten Systeme

a) Kapazität (Tiefpaß)



$$H(s) = \frac{u_2}{u_q} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + s R_1 R_2 C}$$

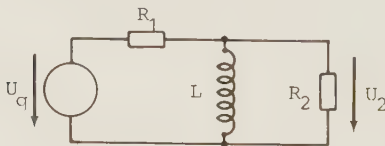
Angenommene Werte:

$$C = 0,5$$

$$R_1 = R_2 = 1$$

$$\Rightarrow H(s) = 2 \cdot \frac{1}{s+4}$$

b) Induktivität (Hochpaß)



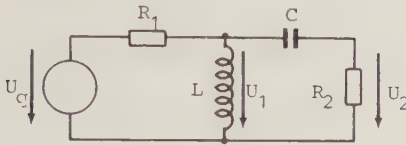
$$H(s) = \frac{u_2}{u_q} = \frac{s L R_2}{s (L R_1 + L R_2) + R_1 R_2}$$

Angenommene Werte: $R_1 = R_2 = 1$

$$L = 0,5$$

$$\Rightarrow H(s) = 1 \cdot \frac{s}{s+1}$$

c) L-C-Glied (Hochpaß)



$$H(s) = \frac{u_2}{u_q} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_1}{u_q} = \frac{sL \cdot sCR_2}{s^2LCR_2 + sL + s^2LCR_2 + sCR_2 + R_1R_2}$$

1.) $R_1 = R_2 = 1$

$$\tilde{H}(s) = \frac{s^2LC}{2s^2LC + (L+C)s + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{s^2 + \frac{L+C}{2LC}s + \frac{1}{2LC}}$$

2.) $L = 1, C = 0,5$

$$H(s) = 1 \cdot \frac{s^2}{s^2 + 1,5s + 1} \quad \begin{aligned} s_{\infty 1,2} &= 0,75 \pm 0,5625-1 \\ &= 0,75 \pm j 0,661437828 \end{aligned}$$

d) Cauer T.P. 5. Grades

C05 25 45c

$$H(s) = C \cdot \frac{(s^2 + s_{o1}^2)(s + s_{o2}^2)}{(s - s_{\infty 1})(s - s_{\infty 2})(s - s_{\infty 2}^*)(s - s_{\infty 3})(s - s_{\infty 3}^*)}$$

$$s_{o1} = \pm j 1,4654384547$$

$$s_{o2} = \pm j 2,1660001062$$

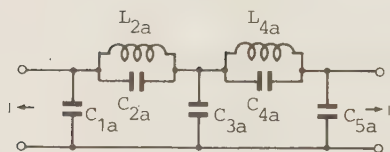
$$s_{\infty 1} = - 0,518032181$$

$$s_{\infty 2} = - 0,329221844 \pm j 0,7407321126$$

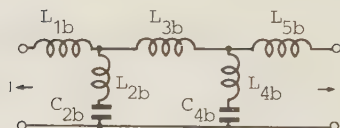
$$s_{\infty 3} = - 0,088219794 \pm j 1,0288960736$$

$$C = 0,023640835$$

Schaltung a



Schaltung b (dual)

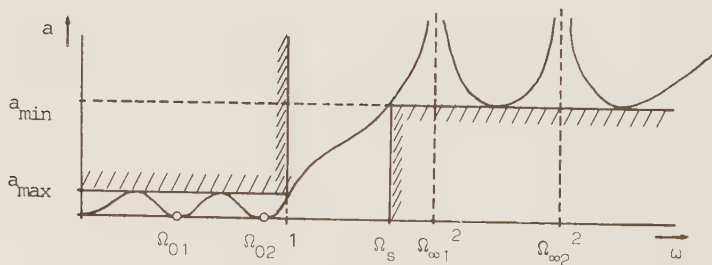


$$\begin{aligned} C_{1a} &= L_{1b} = 1,306 \\ C_{2a} &= L_{2b} = 1,140 \\ L_{2a} &= C_{2b} = 0,187 \\ C_{3a} &= L_{3b} = 1,832 \\ C_{4a} &= L_{4b} = 0,8642 \\ L_{4a} &= C_{4b} = 0,5388 \\ C_{5a} &= L_{5b} = 1,054 \end{aligned}$$

e) Cauer-TP.

6. Grades

CO6 2545c



$$p = 25 \% \hat{=} a_{\max} = 0,27 \text{ dB} \quad a_{\min} = 58,06 \text{ dB}$$

$$H(s) = \frac{1}{C} \frac{\prod_{i=1}^2 (s^2 + \Omega_{\infty i}^2)}{\prod_{i=1}^3 (s^2 - 2a_i s + a_i^2 + b_i^2)}$$

mit

$$\Omega_s = 1.48509$$

$$f_s = 0,236359$$

$$C = 42,2996900$$

$$\Omega_{\infty 1} = 1,5274161177$$

$$\Omega_{\infty 2} = 2,0328001221$$

$$-a_1 = 0,0708567491$$

$$b_1 = 1,0219366323$$

$$-a_2 = 0,2486472244$$

$$b_2 = 0,8000535959$$

$$-a_3 = 0,4732627405$$

$$b_3 = 0,2923120800$$

$$s_{\infty 1,2} = a_1 \pm jb_1$$

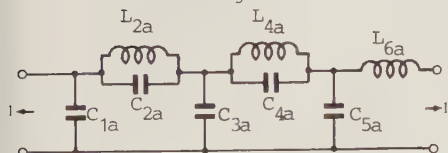
$$s_{\infty 3,4} = a_2 \pm jb_2$$

$$s_{\infty 5,6} = a_3 \pm jb_3$$

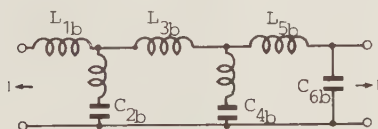
$$s_{O1,2} = \pm j\Omega_{\infty 1}$$

$$s_{O3,4} = \pm j\Omega_{\infty 2}$$

Schaltung a



Schaltung b (dual)



$$C_{1a} = L_{1b} = 1,093$$

$$C_{2a} = L_{2b} = 0,1866$$

$$L_{2a} = C_{2b} = 1,297$$

$$C_{3a} = L_{3b} = 1,503$$

$$C_{4a} = L_{4b} = 0,3188$$

$$L_{4a} = C_{4b} = 1,344$$

$$C_{5a} = L_{5b} = 1,307$$

$$L_{6a} = C_{6b} = 1,261$$

f) Hochpaß aus T O5 25

Transformationsbeziehung: $s_{HP} = \frac{1}{s_{TP}}$; damit:

$$s_{o1} = s_{o2} = s_{o3} = s_{o4} = s_{o5} = 0$$

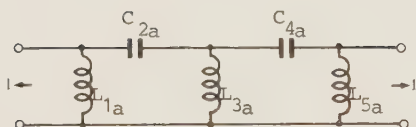
$$s_{\infty 1} = -2,355702803$$

$$s_{\infty 2,3} = -0,120933918 \pm j 0,952512557$$

$$s_{\infty 4,5} = -0,653288095 \pm j 1,214687074$$

$$C = 1$$

Schaltung a



Schaltung b



$$L_{1a} = C_{1b} = 0,6868$$

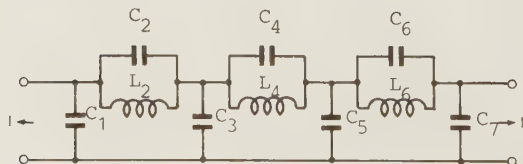
$$C_{2a} = L_{2b} = 0,7651$$

$$L_{3a} = C_{3b} = 0,4380$$

$$C_{4a} = L_{4b} = 0,7651$$

$$L_{5a} = C_{5b} = 0,6868$$

g) Rechteckfilter 7.6:QR



$$H(s) = C \frac{\prod_{\mu=1}^5 (s - s_{0\mu})}{\prod_{v=1}^6 (s - s_{\infty v})}$$

$$\begin{aligned} s_{\infty 1} &= -0,45267 \\ s_{\infty 2,3} &= -0,35244 \pm j \, 0,79649 \\ s_{\infty 4,5} &= -0,24356 \pm j \, 1,72592 \\ s_{\infty 6,7} &= -0,16672 \pm j \, 2,66948 \\ s_{01,2} &= \pm j \, 0,98853 \\ s_{03,4} &= \pm j \, 1,98150 \\ s_{05,6} &= \pm j \, 3,01343 \\ C &= 0,21402098 \end{aligned}$$

Bauelemente

$$\begin{aligned} L_2 &= 0,79910 & C_1 &= 5,21476 \\ & & C_2 &= 1,28152 \\ L_4 &= 0,18485 & C_3 &= 0,14677 \\ & & C_4 &= 1,37862 \\ L_6 &= 0,13094 & C_5 &= 0,025604 \\ & & C_6 &= 0,84185 \\ & & C_7 &= 0,18806 \end{aligned}$$

Für die Messung von Abschn. 4.5.6 wurde die Breite des durch die Impulsantwort approximierten Rechtecks der Verzögerungszeit eines Allpasses angepaßt. Die Pole und Nullstellen errechnen sich nach der Umrechnungsbeziehung

$$\tilde{s}_{\infty v} = s_{\infty v} \cdot \pi ; \tilde{s}_{0\mu} = s_{0\mu} \cdot \pi$$

zu

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{\infty 1} &= -1,42210 \\ \tilde{s}_{\infty 2,3} &= -1,10408 \pm j \, 2,50225 \\ \tilde{s}_{\infty 4,5} &= -0,76517 \pm j \, 5,42214 \\ \tilde{s}_{\infty 6,7} &= -0,52377 \pm j \, 8,38642 \\ \tilde{s}_{01,2} &= \pm j \, 3,10556 \\ \tilde{s}_{03,4} &= \pm j \, 6,22507 \\ \tilde{s}_{05,6} &= \pm j \, 9,46697 \\ \tilde{C} &= 0,6723667 \end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich die normierten Bauelemente zu:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2 &= 0,2544 & \tilde{C}_1 &= 1,6599 \\ \tilde{L}_4 &= 0,0588 & \tilde{C}_2 &= 0,4079 \\ & & \tilde{C}_3 &= 0,0467 \\ & & \tilde{C}_4 &= 0,4388 \\ & & \tilde{C}_5 &= 0,00815 \\ \tilde{L}_6 &= 0,04168 & \tilde{C}_6 &= 0,2680 \\ & & \tilde{C}_7 &= 0,05986 \end{aligned}$$

h) Allpaß 8. Grades

$$H_A(s) = H_{A1}(s) \cdot H_{A2}(s) = H_{A3}(s) \cdot H_{A4}(s)$$

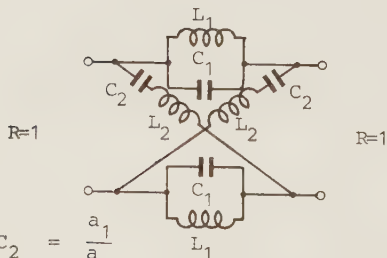
$$\text{mit } H_A(s) = \frac{s^2 - a_1 s + a_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{(s + s_{\infty 1})(s + s_{\infty 2}^*)}{(s - s_{\infty 1})(s - s_{\infty 2}^*)}$$

$$s_{\infty 1} = -5,5879 + j 0,8676$$

$$s_{\infty 2} = -5,2048 + j 2,6162$$

$$s_{\infty 3} = -4,3583 + j 4,4150$$

$$s_{\infty 4} = -2,8390 + j 6,3539$$



$$L_1 = C_2 = \frac{a_1}{a_0}$$

$$C_1 = L_2 = \frac{1}{a_1}$$

	H_{A1}	H_{A2}	H_{A3}	H_{A4}
L_2	0,08948	0,09607	0,11446	0,17612
C_2	0,34949	0,30676	0,22649	0,11724

LITERATURVERZEICHNIS

- |1| W. Giloi, H. Grebe:
Construction of Multistep Integration Formulas for
Simulation Purposes.
IEEE Trans. on Computers, Vol. C-17 (1968), S. 1121-1131

- |2| H. Kremer:
Rekursive Berechnung von Einschwingvorgängen.
NTZ 22 (1969), S. 316-318

- |3| G. Wiesemann:
Numerische Berechnung von Einschwingvorgängen an Band-
pässen.
NTZ 23 (1970), S. 313-355

- |4| I. Gorille:
Digital Simulation of Linear Lumped Parameter Continuous
Systems.
NTZ 25 (1972), Part I, S. 448-451, Part II, S. 532-534

- |5| F.L. Bauer, H.J. Stetter:
Zur numerischen Fourier Transformation.
Numer. Math. 1 (1959), S. 208-220

- |6| D. Achilles:
Pipeline Fourier Transform with Implicit Spline
Interpolation.
AEÜ 29 (1975), S. 74 - 80

- |7| D. Achilles, H. Forster:
Methods of System Simulation Via Fast Fourier Transform
and Implicit Spline Interpolation.
Zur Veröffentlichung eingereicht

- |8| W. Kuntz, W. Schüßler:
Zur numerischen Berechnung der Ausgangsfunktion von
Netzwerken mit Hilfe der z-Transformation.
NTZ 19 (1966), S. 169 - 172

- [9] W. Entenmann, M. Welzenbach:
Über einige numerische Verfahren zur Berechnung des
Zeitverhaltens von Netzwerken.
NTZ 20 (1967), S. 479 - 483

- [10] C. Pottle:
Rapid Computer Time Response Calculation for Systems
with Arbitrary Input Signals.
NTZ 21 (1968), S. 705 - 710

- [11] R. Boxer, S. Thaler:
A simplified Method of Solving Linear and Nonlinear
Systems.
Proc. IRE, Vol. 44 (1956), S. 89 - 101

- [12] R. Boxer:
A Note on Numerical Transform Calculus.
Proc. IRE, Vol. 45, 1957, S. 1401-1406

- [13] I. Gorille:
Zur Anwendung der z-Formen nach Boxer und Thaler bei
der Berechnung von Zeitantworten linearer Systeme.
NTZ 21 (1968), S. 749 - 752

- [14] I. Gorille:
Digitale Simulation und Optimierung von Nachrichten-
systemen.
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 14,
hrsg. von Professor Dr.-Ing. W. Schüssler, 1971

- [15] F.E. Othmer:
Zur Simulation linearer zeitinvarianter Systeme.
AEÜ 27 (1973), S. 397-403

- [16] A. Fettweis:
Digital Filter Structures Related to Classical Filter
Networks.
AEÜ 25 (1971), S. 79-89

- |17| A. Fettweis, A. Sedlmeyer:
Realisierung von Digitalfiltern mit echter Abzweig-
struktur.
NTG-Fachtagung "Signalverarbeitung", Erlangen April
1973, S. 96-103

- |18| A. Fettweis, H. Levin, A. Sedlmeyer:
Wave Digital Lattice Filters.
Intern. Journal of Circuit Theory and Applications,
vol. 2 (1974), S. 203-219

- |19| A. Sedlmeyer:
Structures for Wave Digital Filters and their Real
Time Realization on a Minicomputer.
Dissertation der Abt. für Elektrotechnik an der Ruhr-
Universität Bochum 1974

- |20| H.W. Schüssler:
Digitale Systeme zur Signalverarbeitung.
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973

- |21| J.F. Kaiser:
Digital Filters.
Kap. 7 in System Analysis by Digital Computers,
herausgegeben von Kuo und Kaiser, New York,
John Wiley & Sons, 1966

- |22| H. Schenk:
Eine einheitliche Theorie verschiedener Simulations-
verfahren.
In Vorbereitung

- |23| M.S. Corrington:
Simplified Calculation of Transient Response.
Proc. IEEE Vol 53 (1965), S. 287-292

- |24| R. Unbehauen:
Systemtheorie.
Oldenbourg Verlag München Wien 1969

- |25| W. Kühnel:
Aufwandsuntersuchung bei Wellendigitalfiltern.
Diplomarbeit am Institut für Nachrichtentechnik der
Universität Erlangen-Nürnberg, Dez. 1974

- |26| H.S. El-Ghoroury, S.C. Gupta:
Wave Digital Filter Structures with Variable Frequency
Characteristics.
Electrical Engineering Department Southern Methodist
University, Dallas, Texas 1975

- |27| W. Klein:
Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen.
Akademie-Verlag Berlin 1961

- |28| R. Saal, K. Antreich:
Zur Realisierung von Reaktanz-Allpaß-Schaltungen.
Teil I: Frequenz, Band 16, 1962, S. 269-277
Teil II: Frequenz, Band 17, 1963, S. 14- 22

- |29| R. Unbehauen:
Synthese elektrischer Netzwerke.
R. Oldenbourg-Verlag München 1972

- |30| E. Christian, E. Eisenmann:
Filter Design Tables and Graphs.
John Wiley & Sons, New York-London-Sidney 1966

- |31| R. Saal:
Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Katalogs
normierter Tiefpässe. Telefunken AG, Backnang 1966

- |32| P.A. Meyer:
Über Filter mit angenähert rechteckförmiger
Impulsantwort.
NTZ 18 (1965), S. 249-255

- |33| Verzweigungsnetzwerk;
Interner Bericht des Instituts für Nachrichtentechnik
der Universität Erlangen-Nürnberg von 1967

- |34| P.A. Meyer:
Zur numerischen Berechnung von Einschwingvorgängen
mit Hilfe der Residuenrechnung.
NTZ 19 (1966), S. 139 - 142

- |35| M.L. Liou:
A Novel Method of Evaluating Transient Response.
Proc. IEEE 54 (1966), S. 20 -23

- |36| R.G. Medhurst, J.H. Roberts:
Evaluation of Distortion in F.M. Trunk Radio Systems
by a Monte Carlo Method.
Proc. IEE 113 (1966), S. 570-580

- |37| A. Sedlmeyer:
Berechnung von Wellendigitalfiltern mittels Filterkatalog.
NTZ 27 (1974), S. 302 - 304

- |38| A. Fettweis:
Canonic Realization of Ladder Wave Digital Filters.
Circuit Theory and Applications, Vol. 3 (1975), S.321-332

- |39| A. Fettweis, K. Meerkötter:
On Adaptors for Wave Digital Filters.
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing,
Vol. ASS P-23, No. 6, Dec. 1975, S. 516 - 525

- |40| M.N.S. Swamy, K.S. Thyagarajan:
A New Type of Wave Digital Filter.
Journal of the Franklin Institute, Vol. 300, No. 1,
July 1975, S. 41 - 58

- | 41 | W. Stehle:
Zur Tiefpaß-Bandpaß-Transformation von Impulsformern.
AEÜ 20 (1966), S. 275 - 280

- | 42 | Ch.A. Desoer, M.J. Shensa:
Networks with Very Small and Very Large Parasitics:
Natural Frequencies and Stability.
Proc. IEEE, Vol. 58, No. 12, Dec. 1970, S. 1933 - 1938

- | 43 | T.B.M. Neill:
Efficient Evaluation of Transient Response for High-
Order Systems of Wide Bandwidth.
Elec. Letters, Vol. 5, No. 23 Nov. 1969, S. 599 - 601

- | 44 | M. Silverberg:
A New Method of Solving State Variable Equations
Permitting Large Step Sizes.
Proc. IEEE (Letters), Vol. 56, Aug. 1968, S. 1352 - 1353

- | 45 | A. Semlyen:
Calculation of Transient in a System of Algebraically
Connected Dynamic Components Using a New Numerical
Algorithm.
IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-22, No. 7
July 1975, S. 622 - 627

- | 46 | W.M.G. von Bokhoven:
Linear Implicit Differentiation Formulas of Variable
Step and Order.
IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-22, No. 2
Feb. 1975, S. 109 - 114

- | 47 | W.H. Ku, Siu-Ming Ny:
Floating-Point Coefficient Sensitivity and Roundoff Noise
of Recursive Digital Filters Realized in Ladder Structures.
IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-22, No. 12,
Dec. 1975, S. 927 - 936

- | 48 | J.H. Wilkinson:
Rundungsfehler.
Heidelberger Taschenbücher im Springer Verlag Berlin,
Heidelberg, New York 1969

- | 49 | G.E. Forsythe, C.B. Moler:
Computer Verfahren für lineare algebraische Systeme.
R. Oldenbourg Verlag, München, Wien 1971

- | 50 | R. Zurmühl:
Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker.
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965

- | 51 | G. Doetsch:
Handbuch der Laplace Transformation Band I ... III.
Birkhäuser Verlag, Basel 1950

- | 52 | L.A. Zadek, Ch. A. Desoer:
Linear System Theory.
McGraw Hill 1963

- | 53 | R. Zurmühl:
Matrizen und ihre technischen Anwendungen.
Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1964

- | 54 | H. Forster:
Persönliche Mitteilungen, 1974

LEBENS LAUF

Hans - Peter Renn

7. 2. 1947 geboren in Fürth/Bay.
- 1953 - 1957 Grundschule in Fürth/Bay.
- 1957 - 1966 Hardenberg-Gymnasium in Fürth/Bay.
(mathematisch-naturwissenschaftlich)
- 1966 Abitur
- 1966 - 1968 Grundwehrdienst 18 Monate
- 1968 Vorpraktikum 13 Wochen bei Fa. Siemens
in Nürnberg
- 1968 - 1973 Studium der Elektrotechnik an der
Universität Erlangen - Nürnberg
- 1971 1. Teil des Hauptpraktikums bei Fa. Siemens
in Nürnberg
- 1973 2. Teil des Hauptpraktikums bei Fa. Siemens
in Erlangen
- 1973 Abschluß des Studiums mit Diplomarbeit am
Institut für technische Elektronik
- 1974 - 1976 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut
für Nachrichtentechnik der Universität
Erlangen - Nürnberg

Hans-Peter Renn

Copy-Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197